This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

Über dieses Buch

Dies ist ein digitales Exemplar eines Buches, das seit Generationen in den Regalen der Bibliotheken aufbewahrt wurde, bevor es von Google im Rahmen eines Projekts, mit dem die Bücher dieser Welt online verfügbar gemacht werden sollen, sorgfältig gescannt wurde.

Das Buch hat das Urheberrecht überdauert und kann nun öffentlich zugänglich gemacht werden. Ein öffentlich zugängliches Buch ist ein Buch, das niemals Urheberrechten unterlag oder bei dem die Schutzfrist des Urheberrechts abgelaufen ist. Ob ein Buch öffentlich zugänglich ist, kann von Land zu Land unterschiedlich sein. Öffentlich zugängliche Bücher sind unser Tor zur Vergangenheit und stellen ein geschichtliches, kulturelles und wissenschaftliches Vermögen dar, das häufig nur schwierig zu entdecken ist.

Gebrauchsspuren, Anmerkungen und andere Randbemerkungen, die im Originalband enthalten sind, finden sich auch in dieser Datei – eine Erinnerung an die lange Reise, die das Buch vom Verleger zu einer Bibliothek und weiter zu Ihnen hinter sich gebracht hat.

Nutzungsrichtlinien

Google ist stolz, mit Bibliotheken in partnerschaftlicher Zusammenarbeit öffentlich zugängliches Material zu digitalisieren und einer breiten Masse zugänglich zu machen. Öffentlich zugängliche Bücher gehören der Öffentlichkeit, und wir sind nur ihre Hüter. Nichtsdestotrotz ist diese Arbeit kostspielig. Um diese Ressource weiterhin zur Verfügung stellen zu können, haben wir Schritte unternommen, um den Missbrauch durch kommerzielle Parteien zu verhindern. Dazu gehören technische Einschränkungen für automatisierte Abfragen.

Wir bitten Sie um Einhaltung folgender Richtlinien:

+ *Nutzung der Dateien zu nichtkommerziellen Zwecken* Wir haben Google Buchsuche für Endanwender konzipiert und möchten, dass Sie diese Dateien nur für persönliche, nichtkommerzielle Zwecke verwenden.

+ *Keine automatisierten Abfragen* Senden Sie keine automatisierten Abfragen irgendwelcher Art an das Google-System. Wenn Sie Recherchen über maschinelle Übersetzung, optische Zeichenerkennung oder andere Bereiche durchführen, in denen der Zugang zu Text in großen Mengen nützlich ist, wenden Sie sich bitte an uns. Wir fördern die Nutzung des öffentlich zugänglichen Materials für diese Zwecke und können Ihnen unter Umständen helfen.

+ *Beibehaltung von Google-Markenelementen* Das "Wasserzeichen" von Google, das Sie in jeder Datei finden, ist wichtig zur Information über dieses Projekt und hilft den Anwendern weiteres Material über Google Buchsuche zu finden. Bitte entfernen Sie das Wasserzeichen nicht.

+ *Bewegen Sie sich innerhalb der Legalität* Unabhängig von Ihrem Verwendungszweck müssen Sie sich Ihrer Verantwortung bewusst sein, sicherzustellen, dass Ihre Nutzung legal ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass ein Buch, das nach unserem Dafürhalten für Nutzer in den USA öffentlich zugänglich ist, auch für Nutzer in anderen Ländern öffentlich zugänglich ist. Ob ein Buch noch dem Urheberrecht unterliegt, ist von Land zu Land verschieden. Wir können keine Beratung leisten, ob eine bestimmte Nutzung eines bestimmten Buches gesetzlich zulässig ist. Gehen Sie nicht davon aus, dass das Erscheinen eines Buchs in Google Buchsuche bedeutet, dass es in jeder Form und überall auf der Welt verwendet werden kann. Eine Urheberrechtsverletzung kann schwerwiegende Folgen haben.

Über Google Buchsuche

Das Ziel von Google besteht darin, die weltweiten Informationen zu organisieren und allgemein nutzbar und zugänglich zu machen. Google Buchsuche hilft Lesern dabei, die Bücher dieser Welt zu entdecken, und unterstützt Autoren und Verleger dabei, neue Zielgruppen zu erreichen. Den gesamten Buchtext können Sie im Internet unter `http://books.google.com` durchsuchen.

B. 6. 87. 6.

OXFORD MUSEUM.

LIBRARY AND READING-ROOM.

THIS Book belongs to the "Student's Library."

It may not be removed from the Reading Room without permission of the Librarian.

Math. E.

600048781Y

C

1860 e. 162

EINLEITUNG

IN DIE

MATHEMATISCHE THEORIE

DER

ELASTICITÄT UND CAPILLARITÄT

VON

AUGUST BEER.

HERAUSGEGEBEN

VON

A. GIESEN.

MIT VIER LITHOGRAPHIRTEN TAFELN.

LEIPZIG,
VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1869.

RADCLIFFE LIBRARY
UNIVERSITY
3 JAN 77
MUSEUM
OXFORD

VORREDE.

Vorliegende Schrift des im Jahre 1863 gestorbenen Professor Dr. Beer schliesst sich seiner von Professor Plücker im Jahre 1865 herausgegebenen „Einleitung in die Electrostatik, die Lehre vom Magnetismus und die Electrodynamik“ an, worin sie auch vorläufig angekündigt wurde. Nachdem im vorigen Sommer auch Plücker durch den Tod den Wissenschaften entrissen worden, fiel die Herausgabe dem Unterzeichneten allein zu, der auch bei jenem früher erschienenen Werke vielfach betheiligt war.

In vorliegendem Werke hat der Verfasser, ähnlich wie in dem früheren, sich zum Ziele gesetzt, den Leser auf dem kürzesten Wege mit den wichtigsten Resultaten, welche die Theorie der Elasticität und Capillarität bisher gewonnen, bekannt und ihm dadurch die bezüglichen Originalabhandlungen verständlich zu machen. Da das Manuscript, wie es von Beer hinterlassen worden, die Ableitung der Sätze und Formeln mehrfach nur sehr kurz gibt, so hat der Herausgeber, um das Verständniss zu erleichtern, die mathemati-

schen Entwickelungen, soweit es nöthig schien, ergänzt. Auch die Figurentafeln, auf denen die Meridiancurven einiger bei den Plateau'schen Versuchen zur Sprache kommenden Flächen dargestellt sind, sind vom Herausgeber hinzugefügt worden.

Die Herausgabe des Restes der Beer'schen Manuscripte, welcher die Wärmetheorie und Optik zum Gegenstande hat, soll derjenigen vorliegender Schrift thunlichst bald nachfolgen.

Düren, im Januar 1869.

A. Giesen.

INHALTS-VERZEICHNISS.

Erster Theil: Theorie der Elasticität.

Seite

I. Ueber die Elasticitätskraft und das Elasticitätsgleichgewicht bei festen Körpern 3
1. Allgemeine Betrachtungen über die Elasticitätskraft . . 3
2. Gesetze der Elasticitätskraft in homogenen und isotropen Körpern 10
3. Gleichungen für das Elasticitätsgleichgewicht homogener und isotroper Körper 18
4. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, auf elastische Körper angewandt 24
5. Ueber zwei allgemeinere Gruppen von Verschiebungen . 26
6. Anwendung der Elasticitätsgleichungen auf Erforschung specieller Fälle des Elasticitätsgleichgewichtes 33

II. Experimentelle Prüfung der Theorie des Elasticitätsgleichgewichtes 46
1. Dehnung eines prismatischen Stabes 46
2. Compression einer Hohlkugel 49
3. Torsion eines prismatischen Stabes 51
4. Biegung eines prismatischen Stabes 58

III. Ueber die oscillatorischen Bewegungen in homogenen, isotropen Körpern 68
1. Gleichungen für die oscillatorischen Bewegungen homogener und isotroper Körper 68
2. Erforschung specieller Fälle oscillatorischer Bewegungen, bei welchen eine Dilatation stattfindet 73
3. Erforschung specieller Fälle oscillatorischer Bewegungen, bei welchen eine Dilatation nicht stattfindet 81

IV. Experimentelle Prüfung der Theorie der oscillatorischen Bewegungen in homogenen, isotropen Körpern 87
1. Longitudinalschwingungen prismatischer Stäbe 87
2. Transversalschwingungen eines prismatischen Stabes . . 97
3. Torsionsschwingungen eines prismatischen Stabes . . . 103

Zweiter Theil: Theorie der Capillarität.

Seite

I. Einleitende Bemerkungen. Bedingung für das Gleichgewicht eines Systemes, welches aus einem festen und einem tropfbar flüssigen Körper besteht 109

II. Erforschung specieller Fälle des Gleichgewichtes eines Systemes, das aus einem festen Körper und einer Flüssigkeit besteht . . 114

1. Allgemeine Betrachtungen 114
2. Capillarerscheinungen bei einer schweren Flüssigkeit mit sehr grosser Niveaufläche und einer in dieselbe senkrecht eingetauchten Platte von sehr grosser Breite 120
3. Niveau-Aenderung bei einer schweren Flüssigkeit durch zwei ebene, mit einander parallele und senkrechte Platten von sehr grosser Breite 123
4. Aenderung des Niveaus einer schweren Flüssigkeit durch einen senkrechten hohlen Kreiscylinder; Gleichgewicht einer isolirten Flüssigkeitssäule in einer senkrechten Röhre . . 130
5. Tropfen einer schweren Flüssigkeit auf einer horizontalen Unterlage 142

III. Modification des hydrostatischen Druckes durch Capillarwirkung; Anziehungs- und Abstossungserscheinungen bei zwei in einer Flüssigkeit schwimmenden Körpern 146

1. Modification des hydrostatischen Druckes durch Capillarwirkung 146
2. Anziehungs- und Abstossungserscheinungen bei zwei in einer Flüssigkeit schwimmenden Körpern 153

IV. Gleichgewicht eines Systemes, das aus zwei Flüssigkeiten und einem festen Körper zusammengesetzt ist 158

1. Allgemeine Betrachtungen 158
2. Gleichgewichtsflächen einer ruhenden, der Schwerkraft entzogenen Flüssigkeit 160
3. Gleichgewichtsflächen einer gleichförmig rotirenden, der Schwerkraft entzogenen Flüssigkeit 177

ERSTER THEIL.

THEORIE DER ELASTICITÄT.

I.

Ueber die Elasticitätskraft und das Elasticitätsgleichgewicht bei festen Körpern.

1. Allgemeine Betrachtungen über die Elasticitätskraft.

Die Erscheinungen der Elasticität haben ihren Grund in Kräften, die zwischen den Theilchen der Körper thätig sind und nur dann zu einer merklichen Grösse ansteigen, wenn die Entfernung der auf einander wirkenden Theilchen sehr klein ist. Die Kraft, mit welcher ein Theilchen, dessen Masse m_1 ist, von einem zweiten Theilchen, dessen Masse m_2 ist, angezogen oder abgestossen wird, denken wir uns mit den Massen m_1 und m_2 proportional und überdies von der Entfernung Δr abhängig, so dass sie durch den Ausdruck:

$$m_1 m_2 F(\Delta r)$$

bezeichnet werden kann. — So lange der natürliche Zustand des Körpers keine Aenderung erlitten hat, halten sich alle die Kräfte, die an einem Theilchen angreifen und aus der Einwirkung aller näher gelegenen Theilchen entspringen, das Gleichgewicht. Während dieser Zustand besteht, denke man sich den Körper durch eine Ebene E in zwei Theile T_1 und T_2 zerlegt. Alsdann leuchtet ein, dass der Gleichgewichtszustand des Theiles T_1 in Nichts gestört wird, wenn man den Theil T_2 entfernt und zugleich auf die Theilchen von T_1, welche unmittelbar an E liegen und eine ausserordentlich dünne Schicht bilden, genau solche Kräfte wirken lässt, wie sie vorher von dem Theile T_2 ausgingen. Diese Kräfte lassen sich als Zug-

oder Druckkräfte auffassen, die an der Trennungsfläche E thätig sind. Es ist hierbei klar, dass die Kraft, welche an dem Elemente ε der letzterwähnten Ebene anzubringen ist, um die Wirkung des Theiles T_2 zu ersetzen, sich aus den Kräften zusammensetzt, welche auf die unter ε befindlichen Theilchen der erwähnten Schicht von Seiten des Theiles T_2 wirken. Diese Kraft bezeichnen wir als die an dem Elemente ε wirkende Elasticitätskraft und wollen uns dieselbe stets so gerichtet denken, dass sie die Wirkung vorstellt, welche der vom Coordinatenanfangspunkte abgewandte Theil des Körpers auf den demselben zugewandten ausübt. Wenn wir daher die Componenten derselben nach drei auf einander senkrechten Coordinatenaxen durch εX_0, εY_0, εZ_0 bezeichnen, ferner unter Δr wie oben den Abstand eines Theilchens m_1 in T_1 von einem Theilchen m_2 in T_2, und unter Δx, Δy, Δz die Projectionen jenes Abstandes auf die drei Axen verstehen, so hat man:

$$\varepsilon X_0 = S m_1 S m_2 F(\Delta r) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta r},$$

$$\varepsilon Y_0 = S m_1 S m_2 F(\Delta r) \cdot \frac{\Delta y}{\Delta r},$$

$$\varepsilon Z_0 = S m_1 S m_2 F(\Delta r) \cdot \frac{\Delta z}{\Delta r}.$$

Hier ist die erste Summation auf die in Betracht kommenden Theilchen des Stückes T_2, welche eine auf dem Elemente ε aufliegende dünne Schicht bilden, auszudehnen, während sich die zweite Summation über die Theilchen des Stückes T_1 erstreckt, die unter dem Elemente ε bis zu derjenigen Tiefe hin liegen, die bei der gegenseitigen Wirkung der betreffenden Stücke noch in Betracht kommt. Diese Tiefe, der Radius der Wirkungssphäre für die Molecularkräfte, wird als eine Grösse betrachtet, welche, gegen die Dimensionen des Körpers gehalten, verschwindet. — Für feste Körper müssen im natürlichen Zustande die Grössen X_0, Y_0, Z_0 verschwinden.

Der elastische Körper kann dadurch, dass an einzelne oder alle Theile desselben Kräfte applicirt werden, in einen neuen, gezwungenen Gleichgewichtszustand gebracht werden.

Hierbei werden im Allgemeinen seine Theilchen ihre ursprünglichen, dem natürlichen Gleichgewichtszustande entsprechenden Lagen verlassen und einen neuen Ort aufsuchen. Es werde unterstellt, dass bei der Aenderung der Gestalt, welche in dem Atomensystem des Körpers durch das Hinzutreten der neuen Kräfte bewirkt wird, die Variation der Distanz Δr zweier Theilchen, die auf einander wirken, im Vergleich mit dem ursprünglichen Betrage dieser Distanz eine sehr kleine Grösse sei. Das Wachsthum von Δr werde durch $\Delta\varrho$ bezeichnet und die Zuwachse der Projectionen von Δr auf die Coordinatenaxen seien $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$. Dem Früheren entsprechend ergeben sich dann als Componenten der am Elemente ε wirkenden Zug- oder Druckkraft, welche in dem neuen gezwungenen Gleichgewichtszustande auftritt:

$$\varepsilon X_1 = Sm_1\, Sm_2\, F(\Delta r + \Delta\varrho)\cdot\frac{\Delta x+\Delta\xi}{\Delta r+\Delta\varrho},$$

$$\varepsilon Y_1 = Sm_1\, Sm_2\, F(\Delta r + \Delta\varrho)\cdot\frac{\Delta y+\Delta\eta}{\Delta r+\Delta\varrho},$$

$$\varepsilon Z_1 = Sm_1\, Sm_2\, F(\Delta r + \Delta\varrho)\cdot\frac{\Delta z+\Delta\zeta}{\Delta r+\Delta\varrho}.$$

Wie aus der Relation:

$$(\Delta r+\Delta\varrho)^2 = (\Delta x+\Delta\xi)^2+(\Delta y+\Delta\eta)^2+(\Delta z+\Delta\zeta)^2$$

folgt, ist zu setzen:

$$\Delta\varrho = \frac{\Delta x}{\Delta r}\Delta\xi+\frac{\Delta y}{\Delta r}\Delta\eta+\frac{\Delta z}{\Delta r}\Delta\zeta.$$

Entwickelt man nun die vorstehenden Ausdrücke für die Kraftcomponenten nach steigenden Potenzen der Grössen $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$, wobei man alle Glieder der zweiten und höheren Dimensionen ausser Acht lässt, und zieht dann von den so erhaltenen Ausdrücken für εX_1, εY_1, εZ_1 die obigen für die Componenten εX_0, εY_0, εZ_0 der im ursprünglichen Zustande auftretenden Kraft ab, so findet man endlich für die Componenten der durch die Deformation des Körpers entstandenen elastischen Kraft:

$$\varepsilon X = Sm_1\, Sm_2$$
$$\left\{\frac{F(\Delta r)}{\Delta r}\Delta\xi+\left[\frac{F'(\Delta r)}{\Delta r^2}-\frac{F(\Delta r)}{\Delta r^3}\right](\Delta x^2\Delta\xi+\Delta x\Delta y\Delta\eta+\Delta x\Delta z\Delta\zeta)\right\},$$

$$\varepsilon Y = Sm_1 Sm_2$$
$$\left\{\frac{F(\Delta r)}{\Delta r}\Delta\eta + \left[\frac{F'(\Delta r)}{\Delta r^2} - \frac{F(\Delta r)}{\Delta r^3}\right](\Delta y^2\Delta\eta + \Delta y\Delta z\Delta\zeta + \Delta x\Delta y\Delta\xi)\right\},$$
$$\varepsilon Z = Sm_1 Sm_2$$
$$\left\{\frac{F(\Delta r)}{\Delta r}\Delta\zeta + \left[\frac{F'(\Delta r)}{\Delta r^2} - \frac{F(\Delta r)}{\Delta r^3}\right](\Delta z^2\Delta\zeta + \Delta x\Delta z\Delta\xi + \Delta y\Delta z\Delta\eta)\right\}.$$

Der neue Zustand des Körpers ist vollständig bestimmt, wenn die Verschiebungen bekannt sind, welche ein Punkt längs den drei Coordinatenaxen erlitten hat, während er aus seiner ursprünglichen in die neue Lage versetzt wurde. Wir wollen annehmen, die Verschiebungen seien für den Punkt, dessen ursprüngliche Coordinaten x, y, z sind, bezüglich ξ, η, ζ, so dass die neuen Coordinaten $x+\xi$, $y+\eta$, $z+\zeta$ sein werden. Die Verschiebungen ξ, η, ζ sind Functionen der Coordinaten, und es erlangt der Punkt, dessen ursprüngliche Coordinaten $x+\Delta x$, $y+\Delta y$, $z+\Delta z$ sind, nach der Verschiebung die Coordinaten:

$$x+\Delta x+\xi+\frac{d\xi}{dx}\Delta x+\frac{d\xi}{dy}\Delta y+\frac{d\xi}{dz}\Delta z,$$
$$y+\Delta y+\eta+\frac{d\eta}{dx}\Delta x+\frac{d\eta}{dy}\Delta y+\frac{d\eta}{dz}\Delta z,$$
$$z+\Delta z+\zeta+\frac{d\zeta}{dx}\Delta x+\frac{d\zeta}{dy}\Delta y+\frac{d\zeta}{dz}\Delta z,$$

wenn wiederum nur Glieder mit den ersten Potenzen der Zuwachse Δx, Δy, Δz berücksichtigt werden. In jedem der drei obigen Ausdrücke fällt die Summe der drei letzten Glieder mit den vorher durch $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ bezeichneten, auf die beiden Punkte (x, y, z) und $(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ bezüglichen Grössen zusammen. Daher erhält man z. B. für das in dem obigen Ausdrucke der Componente εX auftretende erste Glied:

$$Sm_1 Sm_2\frac{F(\Delta r)}{\Delta r}\Delta\xi = \frac{d\xi}{dx}Sm_1Sm_2F(\Delta r)\cdot\frac{\Delta x}{\Delta r}$$
$$+\frac{d\xi}{dy}Sm_1Sm_2F(\Delta r)\cdot\frac{\Delta y}{\Delta r}+\frac{d\xi}{dz}Sm_1Sm_2F(\Delta r)\cdot\frac{\Delta z}{\Delta r},$$

wobei man beachten möge, dass bei der Annäherung, die wir erstreben, die Differentialquotienten der Verschiebungen nach

den Coordinaten in der ganzen Ausdehnung der auftretenden Summen als constant betrachtet werden müssen. Mit Rücksicht darauf, dass bei festen Körpern im natürlichen Zustande die oben durch X_0, Y_0, Z_0 bezeichneten Kräfte verschwinden müssen, ersieht man, dass bei solchen der ganze vorstehende Ausdruck verschwindet und gerade so die beiden ersten Glieder in den Ausdrücken für die beiden anderen Componenten der Elasticitätskraft. Setzt man nun noch:

$$\frac{F'(\Delta r)}{\Delta r^2} - \frac{F(\Delta r)}{\Delta r^3} = \varphi,$$

wo φ also eine reine Function von Δr ist, so hat man endlich für die Componenten der Elasticitätskraft bei einem festen Körper, wenn man in die früheren Formeln für $\Delta\xi$, $\Delta\eta$, $\Delta\zeta$ ihre Werthe setzt, folgende allgemeine Ausdrücke:

$$\begin{aligned}
\varepsilon X = Sm_1 Sm_2 \varphi \Big\{ & \Delta x^3 \cdot \frac{d\xi}{dx} + \Delta x^2 \Delta y \cdot \frac{d\xi}{dy} + \Delta x^2 \Delta z \cdot \frac{d\xi}{dz} \\
& + \Delta x^2 \Delta y \cdot \frac{d\eta}{dx} + \Delta x \Delta y^2 \cdot \frac{d\eta}{dy} + \Delta x \Delta y \Delta z \cdot \frac{d\eta}{dz} \\
& + \Delta x^2 \Delta z \cdot \frac{d\zeta}{dx} + \Delta x \Delta y \Delta z \cdot \frac{d\zeta}{dy} + \Delta x \Delta z^2 \cdot \frac{d\zeta}{dz} \Big\}, \\
\varepsilon Y = Sm_1 Sm_2 \varphi \Big\{ & \Delta x \Delta y^2 \cdot \frac{d\eta}{dx} + \Delta y^3 \cdot \frac{d\eta}{dy} + \Delta y^2 \Delta z \cdot \frac{d\eta}{dz} \\
& + \Delta x \Delta y \Delta z \cdot \frac{d\xi}{dx} + \Delta y^2 \Delta z \cdot \frac{d\xi}{dy} + \Delta y \Delta z^2 \cdot \frac{d\xi}{dz} \\
& + \Delta x^2 \Delta y \cdot \frac{d\xi}{dx} + \Delta x \Delta y^2 \cdot \frac{d\xi}{dy} + \Delta x \Delta y \Delta z \cdot \frac{d\xi}{dz} \Big\}, \\
\varepsilon Z = Sm_1 Sm_2 \varphi \Big\{ & \Delta x \Delta z^2 \cdot \frac{d\xi}{dx} + \Delta y \Delta z^2 \cdot \frac{d\xi}{dy} + \Delta z^3 \cdot \frac{d\xi}{dz} \\
& + \Delta x^2 \Delta z \cdot \frac{d\xi}{dx} + \Delta x \Delta y \Delta z \cdot \frac{d\xi}{dy} + \Delta x \Delta z^2 \cdot \frac{d\xi}{dz} \\
& + \Delta x \Delta y \Delta z \cdot \frac{d\eta}{dx} + \Delta y^2 \Delta z \cdot \frac{d\eta}{dy} + \Delta y \Delta z^2 \cdot \frac{d\eta}{dz} \Big\}.
\end{aligned}$$

Die am Elemente ε thätige Elasticitätskraft, deren Componenten jetzt gefunden sind, ist natürlich von der Wahl des Coordinatensystems unabhängig, und aus diesem Grunde müssen sich ihre Componenten in eine Form bringen lassen, welche diese Unabhängigkeit in die Augen springen lässt. Auf Bestimmung jener Form zielen die folgenden Betrachtungen.

Da, wie vorhin bemerkt, die Differentialquotienten der Verschiebungen als constant zu betrachten sind, so dürfen dieselben auch neben die auftretenden Doppelsummen als Factoren gesetzt werden. Die Doppelsummen selbst sind, wie leicht ersichtlich, mit ε proportional, so dass, unter ψ eine blosse Function von Δr verstanden, gesetzt werden darf:

$$Sm_1 Sm_2 \varphi \, \Delta x^{\mathfrak{a}} \Delta y^{\mathfrak{b}} \Delta z^{\mathfrak{c}} = \varepsilon \, Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta x^{\mathfrak{a}} \Delta y^{\mathfrak{b}} \Delta z^{\mathfrak{c}}.$$

Wir wollen jetzt die Unterstellung machen, dass die Coordinatenaxen in dem zu betrachtenden Körper so orientirt und letzterer so gebaut sei, dass in Bezug auf jede der drei Coordinatenebenen vollkommene Symmetrie stattfindet. In diesem Falle wird für jedes auf der x-Axe senkrechte Element der Ausdruck $Sm_2 \psi \, \Delta x^{\mathfrak{a}} \Delta y^{\mathfrak{b}} \Delta z^{\mathfrak{c}}$ verschwinden, wenn $\mathfrak{b}$ oder $\mathfrak{c}$ ungerade ist. Ebenso verschwindet er bei einem auf der y-Axe senkrechten Elemente, wenn $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{c}$, und bei einem auf der z-Axe senkrechten Elemente, wenn $\mathfrak{a}$ oder $\mathfrak{b}$ ungerade ist.

Hiernach und mit Rücksicht auf die übrigen Bemerkungen stellen sich die Componenten X_x, Y_x, Z_x der auf die Flächeneinheit bezogenen Elasticitätskraft, welche ein auf der x-Axe senkrechtes Element angreift, wie folgt dar:

$$X_x = Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta x^3 \cdot \frac{d\xi}{dx} + Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta x \, \Delta y^2 \cdot \frac{d\eta}{dy} + Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta x \, \Delta z^2 \cdot \frac{d\zeta}{dz},$$

$$Y_x = Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta x \, \Delta y^2 \left(\frac{d\eta}{dx} + \frac{d\xi}{dy}\right),$$

$$Z_x = Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta x \, \Delta z^2 \left(\frac{d\zeta}{dx} + \frac{d\xi}{dz}\right).$$

Ebenso hat man bei einem auf der y-Axe senkrechten Elemente:

$$Y_y = Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta y^3 \cdot \frac{d\eta}{dy} + Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta y \, \Delta x^2 \cdot \frac{d\xi}{dx} + Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta y \, \Delta z^2 \cdot \frac{d\zeta}{dz},$$

$$X_y = Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta y \, \Delta x^2 \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right),$$

$$Z_y = Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta y \, \Delta z^2 \left(\frac{d\zeta}{dy} + \frac{d\eta}{dz}\right).$$

Und für ein auf der z-Axe senkrechtes Element ist:

$$Z_z = Sm_1\, Sm_2\, \psi\, \Delta z^3 \cdot \frac{d\xi}{dz} + Sm_1\, Sm_2\, \psi\, \Delta z\, \Delta y^2 \cdot \frac{d\eta}{dy} + Sm_1\, Sm_2\, \psi\, \Delta z\, \Delta x^2 \cdot \frac{d\xi}{dx},$$

$$Y_z = Sm_1\, Sm_2\, \psi\, \Delta z\, \Delta y^2 \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\xi}{dy}\right),$$

$$X_z = Sm_1\, Sm_2\, \psi\, \Delta z\, \Delta x^2 \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right).$$

Aus den letzterhaltenen Ausdrücken lässt sich, indem man die Betrachtung des sogenannten Elementartetraeders zu Hülfe nimmt, die gewünschte Form für die an einem beliebig gerichteten Elemente thätige Elasticitätskraft finden. Durch drei den Coordinatenebenen parallele und eine vierte beliebig gerichtete Ebene werde aus der Masse des Körpers ein Tetraeder von sehr kleinen Dimensionen herausgeschnitten, von dem angenommen werde, dass seine Spitze dem Ursprunge zugekehrt sei. Die drei auf den Coordinatenaxen senkrechten Seitenflächen seien bezüglich ε_x, ε_y, ε_z, während die vierte durch ε und die Winkel, welche eine nach aussen gerichtete Normale von ε mit den Axen bildet, durch α, β, γ bezeichnet werden mögen. In den Punkten des Tetraeders greifen im Allgemeinen äussere Kräfte an, und die Wirkung der neben dem Tetraeder in dem betrachteten Körper vorhandenen Materie lässt sich durch Zug- oder Druckkräfte ersetzen, die an den Seitenflächen des Tetraeders thätig sind. Letztere Kräfte mögen, auf die Flächeneinheit bezogen, durch $-P_x$, $-P_y$, $-P_z$, P bezeichnet werden, wo dann die P die an den Flächen des Tetraeders wirkenden Elasticitätskräfte sind. Für verschwindende Dimensionen des Tetraeders verschwinden die äusseren Kräfte, deren Resultante ein Unendlich-Kleines dritter Ordnung ist, gegen die Molecularkräfte, welche Unendlich-Kleine zweiter Ordnung sind, und müssen sich letztere, nach demselben Punkte hin verschoben, das Gleichgewicht halten, was offenbar auch die einzige Bedingung für das Gleichgewicht des Tetraeders ist. Es ist folglich, wenn die Componenten der Molecularkräfte nach den drei Axen durch die entsprechenden Buchstaben dargestellt werden:

$$\varepsilon X - \varepsilon_x X_x - \varepsilon_y X_y - \varepsilon_z X_z = 0,$$
$$\varepsilon Y - \varepsilon_x Y_x - \varepsilon_y Y_y - \varepsilon_z Y_z = 0,$$
$$\varepsilon Z - \varepsilon_x Z_x - \varepsilon_y Z_y - \varepsilon_z Z_z = 0.$$

Nun hat man aber:

$$\varepsilon_x = \varepsilon \cos\alpha, \quad \varepsilon_y = \varepsilon \cos\beta, \quad \varepsilon_z = \varepsilon \cos\gamma;$$

und folglich hat man für die Componenten der auf die Flächeneinheit bezogenen Elasticitätskraft P, welche an einem Flächenelemente wirkt, dessen Normale mit den Axen die Winkel α, β, γ bildet:

$$X = X_x \cos\alpha + X_y \cos\beta + X_z \cos\gamma,$$
$$Y = Y_x \cos\alpha + Y_y \cos\beta + Y_z \cos\gamma,$$
$$Z = Z_x \cos\alpha + Z_y \cos\beta + Z_z \cos\gamma.$$

2. Gesetze der Elasticitätskraft in homogenen und isotropen Körpern.

Die Resultate, welche sich uns bisher ergeben haben, mögen jetzt für den Fall eines nach allen Richtungen hin gleich beschaffenen, d. i. eines isotropen Mittels, weiter verfolgt werden. Die Coefficienten der Differentialquotienten, welche in den Grössen $X_x, \ldots . Z_z$ auftreten und lediglich von der Beschaffenheit des Mittels abhängen, ziehen sich hier auf zwei wesentlich verschiedene Grössen zurück, nämlich:

$$Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta x^3 = Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta y^3 = Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta z^3 = \sigma,$$

und

$$Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta x^2 \Delta y = Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta x^2 \Delta z = Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta y^2 \Delta x =$$
$$Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta y^2 \Delta z = Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta z^2 \Delta x = Sm_1 Sm_2 \psi \, \Delta z^2 \Delta y = \mu.$$

Demzufolge wird:

$$X_y = Y_x, \quad X_z = Z_x, \quad Y_z = Z_y,$$

so dass man für die Componenten der durch die Deformation erzeugten Molecular- oder Elasticitätskraft folgende Ausdrücke findet:

$$X = N_x \cos\alpha + T_z \cos\beta + T_y \cos\gamma,$$
$$Y = T_z \cos\alpha + N_y \cos\beta + T_x \cos\gamma,$$
$$Z = T_y \cos\alpha + T_x \cos\beta + N_z \cos\gamma,$$

wo zu setzen ist:

$$N_x = \sigma \frac{d\xi}{dx} + \mu \left(\frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right), \qquad T_x = \mu \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right),$$
$$N_y = \sigma \frac{d\eta}{dy} + \mu \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\zeta}{dz}\right), \qquad T_y = \mu \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right),$$
$$N_z = \sigma \frac{d\zeta}{dz} + \mu \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy}\right), \qquad T_z = \mu \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right).$$

Die constanten Grössen σ und μ treten in ein bestimmbares Verhältniss, wenn die Massentheilchen, welche wir durch m_1 und m_2 bezeichneten, so nahe und in der Art an einander rücken, dass der Raum, den sie erfüllen, als stetig von homogener Materie erfüllt betrachtet werden darf. In dieser Unterstellung lassen sich die durch σ, μ bezeichneten Summen unter der Gestalt von bestimmten Integralen darstellen und so mit einander vergleichen. Die ohne besondere Schwierigkeiten auszuführende Rechnung liefert:

$$\sigma = 3\mu,$$

so dass dann erhalten wird:

$$N_x = \mu \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) + 2\mu \frac{d\xi}{dx}, \qquad T_x = \mu \left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right),$$
$$N_y = \mu \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) + 2\mu \frac{d\eta}{dy}, \qquad T_y = \mu \left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right),$$
$$N_z = \mu \left(\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}\right) + 2\mu \frac{d\zeta}{dz}, \qquad T_z = \mu \left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right).$$

Wenn man ein neues Coordinatensystem einführt, das sich nur durch die Richtung der Axen von dem bisher gebrauchten unterscheidet, und für dieses neue System mittelst der obigen Formeln die Kräfte N und T bestimmt, so zwar, dass in ihren Ausdrücken nur die neuen Coordinaten und die Projectionen der Verschiebungen auf die neuen Axen auftreten, so können sich, weil nach der Annahme der Körper ein isotroper sein soll, die so erhaltenen Ausdrücke von den oben aufgeführten in der Form nicht unterscheiden, wie auch nicht in den Coefficienten der Differentialquotienten.

Bezeichnen wir, um dieses zu erweisen, die neuen Coordinaten mit x', y', z', die neuen Verschiebungen mit ξ', η', ζ' und die neuen Kräfte mit N', T', so können wir die Formeln,

welche den Uebergang von dem einen Systeme zum andern ausdrücken, so schreiben:

$$x = ax' + by' + cz', \qquad \xi' = a\xi + a'\eta + a''\zeta,$$
$$y = a'x' + b'y' + c'z', \qquad \eta' = b\xi + b'\eta + b''\zeta,$$
$$z = a''x' + b''y' + c''z', \qquad \zeta' = c\xi + c'\eta + c''\zeta,$$

wobei die Coefficienten die Cosinus der Winkel sind, die die neuen Axen mit den alten bilden, zwischen denen bekanntlich eine Reihe von Relationen besteht, wie

$$a^2 + b^2 + c^2 = 1, \qquad a^2 + a'^2 + a''^2 = 1,$$
$$ab + a'b' + a''b'' = 0, \qquad aa' + bb' + cc' = 0 \text{ u. s. w.}$$

Man erhält nun leicht:

$$\frac{d\xi'}{dx'} = a\left(a\frac{d\xi}{dx} + a'\frac{d\xi}{dy} + a''\frac{d\xi}{dz}\right) + a'\left(a\frac{d\eta}{dx} + a'\frac{d\eta}{dy} + a''\frac{d\eta}{dz}\right)$$
$$+ a''\left(a\frac{d\zeta}{dx} + a'\frac{d\zeta}{dy} + a''\frac{d\zeta}{dz}\right)$$
$$= a^2\frac{d\xi}{dx} + a'^2\frac{d\eta}{dy} + a''^2\frac{d\zeta}{dz} + aa'\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right) + aa''\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right)$$
$$+ a'a''\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right),$$

woraus man durch blosse Vertauschung der Coefficienten a mit b oder c die Ausdrücke für $\frac{d\eta'}{dy'}$ oder $\frac{d\zeta'}{dz'}$ erhält. Ebenso erhält man:

$$\frac{d\eta'}{dz'} + \frac{d\zeta'}{dy'} = 2bc\frac{d\xi}{dx} + 2b'c'\frac{d\eta}{dy} + 2b''c''\frac{d\zeta}{dz} + (bc' + b'c)\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right)$$
$$+ (bc'' + b''c)\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right) + (b'c'' + b''c')\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right),$$

und hieraus bildet man sofort die Ausdrücke:

$$\frac{d\xi'}{dz'} + \frac{d\zeta'}{dx'} \text{ und } \frac{d\xi'}{dy'} + \frac{d\eta'}{dx'}$$

durch blosse Vertauschung der Coefficienten b, c mit a, c oder a, b. Aus dem Vorhergehenden folgt nun sogleich:

$$\frac{d\xi'}{dx'} + \frac{d\eta'}{dy'} + \frac{d\zeta'}{dz'} = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz},$$

wie auch zu erwarten war, da der Ausdruck $\frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}$, den wir abkürzend fortan mit θ bezeichnen werden, die in

dem Punkte (x, y, z) erzeugte cubische Dilatation darstellt, somit von der Richtung der Coordinatenaxen nicht abhängig sein kann. Die erwähnte Bedeutung des in Rede stehenden Ausdruckes ergibt sich sogleich durch Betrachtung eines verschwindend kleinen Parallelepipeds, dessen einer Eckpunkt (x, y, z) ist, und dessen mit den Axen parallele Kanten die Längen dx, dy, dz haben. Um nun weiter die N' und T' durch die N und T auszudrücken, haben wir z. B. für die Componenten der an einem auf der x'-Axe senkrechten Flächenelemente wirkenden Elasticitätskraft, solche nach den alten Axen genommen, in Folge der oben aufgestellten Formeln:

$$X = aN_x + a'T_z + a''T_y;$$
$$Y = aT_z + a'N_y + a''T_x;$$
$$Z = aT_y + a'T_x + a''N_z.$$

Durch Projection dieser Componenten auf die neuen Axen erhalten wir N'_x, T'_z und T'_y; z. B.:

$$N'_x = a^2N_x + a'^2N_y + a''^2N_z + 2aa'T_z + 2aa''T_y + 2a'a''T_x,$$
$$T'_z = abN_x + a'b'N_y + a''b''N_z + (a'b + ab')T_z + (a''b + ab'')T_y + (a''b' + a'b'')T_x,$$

woraus die anderen N' und T' durch blosse Vertauschung der Coefficienten erhalten werden. Mittelst der im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke für die neuen Differentialquotienten der Verschiebungen und die neuen Elasticitätskräfte und mit Rücksicht auf die zwischen den Coefficienten a, b, c etc. bestehenden Relationen ersieht man nun sogleich, dass die Ausdrücke für die N' und T' ganz dieselbe Form erhalten, wie diejenigen für die N und T, und dass dasselbe stattfindet, welches auch der Coefficient von θ in den Ausdrücken für die N sein mag, indem das Glied $\mu\theta$ in die Ausdrücke für die N' ungeändert übergeht, während es aus denen für die T' fortfällt. Aus diesem Grunde darf man den Coefficienten von θ durch einen anderen ersetzen, ohne dass die Form der Ausdrücke für N und T von der Wahl der Axen abhängig wird. Weil nun durch Einführung einer zweiten Constanten eine grössere Allgemeinheit erzielt wird, führen wir nach Lamé *(Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité des corps solides. 1852.)* als Coefficienten von θ in den früheren Formeln

die Grösse λ ein, obgleich wir dadurch zugleich die Bedeutung der bisherigen Betrachtungen darauf beschränken, dass sie nur dazu gedient haben, die Form der Ausdrücke für die Elasticitätskraft zu finden. Die Componenten der letzteren sind also:

$$X = N_x \cos\alpha + T_z \cos\beta + T_y \cos\gamma,$$
$$Y = T_z \cos\alpha + N_y \cos\beta + T_x \cos\gamma,$$
$$Z = T_y \cos\alpha + T_x \cos\beta + N_z \cos\gamma,$$

wo zu setzen ist:

$$N_x = \lambda\theta + 2\mu\frac{d\xi}{dx}, \qquad T_x = \mu\left(\frac{d\eta}{dz} + \frac{d\zeta}{dy}\right),$$
$$N_y = \lambda\theta + 2\mu\frac{d\eta}{dy}, \qquad T_y = \mu\left(\frac{d\xi}{dz} + \frac{d\zeta}{dx}\right),$$
$$N_z = \lambda\theta + 2\mu\frac{d\zeta}{dz}, \qquad T_z = \mu\left(\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\eta}{dx}\right),$$
$$\theta = \frac{d\xi}{dx} + \frac{d\eta}{dy} + \frac{d\zeta}{dz}.$$

Das in obigen Ausdrücken enthaltene Gesetz, welches die Abhängigkeit der Grösse und Richtung der Elasticitätskraft von der Richtung des Elementes, auf welches sie sich bezieht, bestimmt, lässt sich in folgender Weise geometrisch anschaulich darstellen. Die Gleichung:

$$N_x x^2 + N_y y^2 + N_z z^2 + 2T_x yz + 2T_y xz + 2T_z xy = Const.,$$

deren Coefficienten sich von einem Punkte des Mittels zum andern ändern, aber als bekannt anzusehen sind, sobald die Art des neuen Gleichgewichtszustandes bekannt ist, stellt eine centrische Fläche des zweiten Grades dar. Sucht man die Diametralebene derselben auf, welche sich der Richtung (α, β, γ) zuordnet, so findet man, wenn die Winkel zwischen den Coordinatenaxen und der Normale jener Ebene durch a, b, c bezeichnet werden:

$$\frac{N_x\cos\alpha + T_z\cos\beta + T_y\cos\gamma}{\cos a} = \frac{T_z\cos\alpha + N_y\cos\beta + T_x\cos\gamma}{\cos b}$$
$$= \frac{T_y\cos\alpha + T_x\cos\beta + N_z\cos\gamma}{\cos c}.$$

Diese Ausdrücke lassen schliessen, dass die Elasticitätskraft der Richtung nach durch die Normale der erwähnten

Diametralebene bestimmt wird. Eine weitere Folge hiervon ist der Satz, dass es für jeden Punkt drei auf einander senkrechte Lagen des Elementes ε giebt, für welche die zugehörige Elasticitätskraft auf dem Elemente senkrecht steht; letzteres tritt dann, aber auch nur dann ein, wenn das Element ε auf einer Axe der obigen Hülfsfläche vom zweiten Grade senkrecht steht.

Man lege nun durch den Punkt selbst, dessen Verhältnisse betrachtet werden sollen, drei Coordinatenaxen, die mit den Axen der Hülfsfläche parallel sind. Alsdann hat man, wenn N_x, N_y, N_z die Elasticitätskräfte für die drei Lagen des Elementes sind, wo letzteres auf den Axen senkrecht steht, und wenn P die Elasticitätskraft und a, b, c ihre Winkel für ein Element sind, dessen Normale durch die Winkel α, β, γ bestimmt ist:

$$P\cos a = N_x \cos\alpha; \quad P\cos b = N_y \cos\beta; \quad P\cos c = N_z \cos\gamma.$$

Es folgt hieraus:

$$P^2 = N_x^2 \cos\alpha^2 + N_y^2 \cos\beta^2 + N_z^2 \cos\gamma^2,$$

und diese Formel lässt ersehen, dass die Kraft P der Grösse nach durch den auf ε senkrechten Radiusvector einer Fläche dargestellt wird, deren Gleichung die folgende ist:

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = N_x^2 x^2 + N_y^2 y^2 + N_z^2 z^2.$$

Man nennt die letztere Fläche Elasticitätsfläche; sie wurde zuerst von Fresnel bei Gelegenheit seiner optischen Untersuchungen eingeführt. Aus einem Ellipsoide mit den Halbaxen N_x, N_y, N_z wird dieselbe abgeleitet, wenn man aus dem Mittelpunkte Perpendikel auf die Tangentialebenen herablässt; die Fusspunkte der Perpendikel bilden die fragliche Fläche.

Die Gleichung des genannten Ellipsoides ist nämlich:

$$\frac{x^2}{N_x^2} + \frac{y^2}{N_y^2} + \frac{z^2}{N_z^2} = 1,$$

und die Tangentialebene desselben im Punkte (x', y', z') wird dargestellt durch die Gleichung:

$$\frac{xx'}{N_x^2} + \frac{yy'}{N_y^2} + \frac{zz'}{N_z^2} = 1.$$

Aus dieser Gleichung folgt für die Länge p des Perpendikels vom Mittelpunkte auf die Tangentialebene:

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{x'^2}{N_x^4} + \frac{y'^2}{N_y^4} + \frac{z'^2}{N_z^4}}},$$

und für die Cosinus der Winkel $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, die dasselbe mit den Axen bildet:

$$\cos\mathfrak{a} = \frac{x'}{N_x^2}p, \quad \cos\mathfrak{b} = \frac{y'}{N_y^2}p, \quad \cos\mathfrak{c} = \frac{z'}{N_z^2}p.$$

Die Coordinaten x, y, z des Fusspunktes des Perpendikels sind daher:

$$x = \frac{x'}{N_x^2}p^2, \quad y = \frac{y'}{N_y^2}p^2, \quad z = \frac{z'}{N_z^2}p^2.$$

Um aus diesen Gleichungen und der Gleichung des Ellipsoides x', y' und z' zu eliminiren, haben wir:

$$N_x^2 x^2 = \frac{x'^2}{N_x^2}p^4, \quad N_y^2 y^2 = \frac{y'^2}{N_y^2}p^4, \quad N_z^2 z^2 = \frac{z'^2}{N_z^2}p^4;$$

durch Addition dieser Gleichungen erhalten wir aber mit Rücksicht auf die Gleichung des Ellipsoides:

$$N_x^2 x^2 + N_y^2 y^2 + N_z^2 z^2 = p^4 = (x^2 + y^2 + z^2)^2,$$

was die Gleichung der Elasticitätsfläche ist.

Was die ersterwähnte Hülfsfläche betrifft, durch welche die Richtung der Elasticitätskraft bestimmt wird, so ist ihre Gleichung für die neue Wahl der Coordinatenaxen folgende:

$$N_x x^2 + N_y y^2 + N_z z^2 = Const.$$

Je nach den Vorzeichen der Hauptelasticitätskräfte N_x, N_y, N_z kann man bei zweckmässiger Annahme des willkürlichen constanten Gliedes immer bewirken, dass diese Fläche ein reelles Ellipsoid oder ein beliebiges der beiden Hyperboloide wird.

Wird eine der Hauptelasticitätskräfte, z. B. N_z, gleich Null, so wird die Fläche ein auf der xy-Ebene senkrechter elliptischer oder hyperbolischer Cylinder, und da bei einem solchen zu allen in einer zur z-Axe parallelen Ebene gelegenen Richtungen dieselbe auf der xy-Ebene senkrechte Diametralebene gehört, so liegt in diesem Falle für jede Richtung des Elementes ε die Elasticitätskraft in einer auf der Richtung der verschwindenden Hauptelasticitätskraft senkrechten Ebene, und ist gleich gerichtet für alle Elemente, die sich in der fraglichen Ebene in derselben Geraden schneiden. Werden endlich

zwei Hauptelasticitätskräfte, z. B. N_y und N_z, gleich Null, so geht die Fläche in das System zweier vom Ursprunge gleich weit abstehenden, zur x-Axe senkrechten Ebenen über, und für jede Richtung von ε ist jetzt die Elasticitätskraft parallel der einen nicht verschwindenden Hauptelasticität. Ihre Grösse stellt sich dar durch $N_x \cos\alpha$; sie verschwindet also, wenn die Normale des Elementes ε senkrecht steht zu der gemeinsamen Richtung aller Elasticitätskräfte.

Auch die lineare Dilatation für die verschiedenen Richtungen befolgt ein einfaches Gesetz. Wenn eine Differentiation nach einer durch die Winkel λ, μ, ν bestimmten Richtung s durch $\frac{d\ldots}{ds}$ bezeichnet wird, so hat man, unter t die Verschiebung nach dieser Richtung verstanden, für die lineare Dilatation D nach derselben:

$$D=\frac{dt}{ds}=\frac{dt}{dx}\cdot\frac{dx}{ds}+\frac{dt}{dy}\cdot\frac{dy}{ds}+\frac{dt}{dz}\cdot\frac{dz}{ds}=\frac{dt}{dx}\cos\lambda+\frac{dt}{dy}\cos\mu+\frac{dt}{dz}\cos\nu.$$

Nun ist aber, unter ξ, η, ζ wie bisher die Verschiebungen nach den Axen verstanden:

$$t=\xi\cos\lambda+\eta\cos\mu+\zeta\cos\nu.$$

Bemerkt man überdies, dass für die jetzigen Axen die früher durch T bezeichneten Kräfte verschwinden, so leuchtet ein, dass man hat:

$$D=\frac{d\xi}{dx}\cos\lambda^2+\frac{d\eta}{dy}\cos\mu^2+\frac{d\zeta}{dz}\cos\nu^2.$$

Wenn wir also die Dilatationen nach den drei Axen bezüglich durch D_x, D_y, D_z bezeichnen, so wird die lineare Dilatation nach einer beliebigen Richtung durch das Quadrat des in diese Richtung fallenden Radiusvector einer Fläche dargestellt, deren Gleichung die folgende ist:

$$(x^2+y^2+z^2)^2=D_x x^2+D_y y^2+D_z z^2,$$

wobei man weiter hat:

$$D_x=\frac{1}{2\mu}(N_x-\lambda\theta),\quad D_y=\frac{1}{2\mu}(N_y-\lambda\theta),\quad D_z=\frac{1}{2\mu}(N_z-\lambda\theta),$$
$$D_x+D_y+D_z=\theta.$$

Diese Fläche ist der geometrische Ort der Fusspunkte der Perpendikel, welche auf die Tangentialebenen einer centrischen

Fläche zweiten Grades mit den Halbaxen $\sqrt{D_x}$, $\sqrt{D_y}$, $\sqrt{D_z}$ von deren Mittelpunkte aus gefällt werden. Sind die drei Hauptdilatationen sämmtlich positiv, so ist die Fläche von derselben Natur, wie die oben erwähnte Elasticitätsfläche.

3. Gleichungen für das Elasticitätsgleichgewicht homogener und isotroper Körper.

Die Kräfte, welche einen elastischen Körper aus seinem natürlichen Zustande in einen neuen versetzen, werden im Allgemeinen sowohl Druck- oder Zugkräfte sein, welche an der Oberfläche angreifen, als auch solche Kräfte, die alle einzelnen Theilchen des Körpers sollicitiren, und beide Arten werden in Richtung und Grösse von der Lage ihres Angriffspunktes abhängig sein. Diese äusseren Kräfte mit Einschluss derjenigen, welche einzuführen sind, um den Zusammenhang des Körpers mit anderen Körpern zu ersetzen, müssen sich nun offenbar, nachdem ein neues Gleichgewicht eingetreten ist, an dem frei gedachten Körper für sich Gleichgewicht halten, letzteren als absolut starr gedacht. Um die Bedingungen für dieses Gleichgewicht aufzustellen, bezeichnen wir die Componenten der an dem Oberflächenelemente do thätigen Kraft P_0, solche auf die Flächeneinheit bezogen, durch X_0, Y_0, Z_0. Ebenso mögen X_i, Y_i, Z_i die Componenten der Kraft P_i sein, die an dem cubischen Elemente dk thätig ist, dessen als constant zu betrachtende Dichtigkeit ϱ sei, solche Kraft auf die Masseneinheit bezogen. Zuvörderst hat man dann nach den Lehren der Statik:

$$\text{I.}\quad \begin{cases} \int X_0\,do + \int X_i \varrho\,dk = 0; \quad \int Y_0\,do + \int Y_i \varrho\,dk = 0; \\ \qquad\qquad \int Z_0\,do + \int Z_i \varrho\,dk = 0; \\ \int (Y_0 x - X_0 y)\,do + \int (Y_i x - X_i y)\,\varrho\,dk = 0; \\ \int (Z_0 y - Y_0 z)\,do + \int (Z_i y - Y_i z)\,\varrho\,dk = 0; \\ \int (X_0 z - Z_0 x)\,do + \int (X_i z - Z_i x)\,\varrho\,dk = 0. \end{cases}$$

Was ferner die Beziehung zwischen den äusseren Kräften und den durch die Deformation hervorgerufenen Elasticitätskräften betrifft, so muss die äussere Kraft, welche auf ein Element der Oberfläche wirkt, mit der Elasticitätskraft zusammenfallen, die auf dasselbe Element wirkt. Dies ergibt sich

unter Anderem aus der Betrachtung eines Elementar-Tetraeders, von dem eine Fläche das fragliche Element, die übrigen mit je einer Coordinatenebene parallel sind. Hiernach hat man für alle Theile der Oberfläche, unter α, β, γ die Winkel zwischen der Normale und den Axen verstanden:

$$\text{II.} \quad \begin{cases} X_0 = N_x \cos\alpha + T_z \cos\beta + T_y \cos\gamma, \\ Y_0 = T_z \cos\alpha + N_y \cos\beta + T_x \cos\gamma, \\ Z_0 = T_y \cos\alpha + T_x \cos\beta + N_z \cos\gamma. \end{cases}$$

Um die analogen Gleichungen für die zweite Art der äusseren Kräfte zu gewinnen, betrachten wir das Gleichgewicht eines Elementar-Parallelepipedes, dessen dem Ursprunge zugewandter Eckpunkt die Coordinaten x, y, z hat, und dessen den Axen parallele Kanten die Längen dx, dy, dz haben. Die Flächen desselben seien bezüglich:

$$\varepsilon_x,\ \varepsilon_{x+dx};\quad \varepsilon_y,\ \varepsilon_{y+dy};\quad \varepsilon_z,\ \varepsilon_{z+dz}.$$

Lassen wir nun an diesen Flächen die Elasticitätskräfte thätig bleiben, denen sie ausgesetzt sind, so wird das am Parallelepipedon thätige Kräftesystem auch dann im Gleichgewichte bleiben, wenn wir die ganze ausserhalb jenes Raumes befindliche Materie uns entfernt denken. An die Stelle der äusseren Kräfte, welche an dem so frei erhaltenen Parallelepipedon wirken, lässt sich eine einzige Kraft setzen, die im Schwerpunkte angreift und deren Componenten folgende sind:

$$\varrho X_i\, dx\, dy\, dz, \quad \varrho Y_i\, dx\, dy\, dz, \quad \varrho Z_i\, dx\, dy\, dz.$$

Die Elasticitätskräfte, welche an den Elementen $\varepsilon_x = dy\, dz$, $\varepsilon_y = dx\, dz$, $\varepsilon_z = dx\, dy$ thätig sind, lassen sich durch je eine Kraft ersetzen, die in der Mitte der betreffenden Seitenfläche angreift; die Componenten dieser Kräfte sind mit Beibehaltung der früheren Bezeichnungsweise folgende:

an ε_x wirkend: $-N_x\, dy\, dz$, $-T_z\, dy\, dz$, $-T_y\, dy\, dz$;
an ε_y wirkend: $-T_z\, dx\, dz$, $-N_y\, dx\, dz$, $-T_x\, dx\, dz$;
an ε_z wirkend: $-T_y\, dx\, dy$, $-T_x\, dx\, dy$, $-N_z\, dx\, dy$.

Für die Componenten der an den Seitenflächen ε_{x+dx}, ε_{y+dy}, ε_{z+dz} wirkenden Kräfte erhält man:

an ε_{x+dx} wirkend:

$$\left(N_x + \frac{dN_x}{dx}dx\right)dy\,dz, \quad \left(T_z + \frac{dT_z}{dx}dx\right)dy\,dz, \quad \left(T_y + \frac{dT_y}{dx}dx\right)dy\,dz;$$

an ε_{y+dy} wirkend:

$$\left(T_z+\frac{dT_z}{dy}dy\right)dx\,dz,\ \left(N_y+\frac{dN_y}{dy}dy\right)dx\,dz,\ \left(T_x+\frac{dT_x}{dy}dy\right)dx\,dz;$$

an ε_{z+dz} wirkend:

$$\left(T_y+\frac{dT_y}{dz}dz\right)dx\,dy,\ \left(T_x+\frac{dT_x}{dz}dz\right)dx\,dy,\ \left(N_z+\frac{dN_z}{dz}dz\right)dx\,dy.$$

Das ganze Kräftesystem liefert drei im Mittelpunkte des Parallelepipedons angreifende nach den Axen gerichtete Kräfte, für deren Werthe sich sogleich folgende Ausdrücke ergeben:

$$\left(\frac{dN_x}{dx}+\frac{dT_z}{dy}+\frac{dT_y}{dz}\right)dx\,dy\,dz,$$

$$\left(\frac{dT_z}{dx}+\frac{dN_y}{dy}+\frac{dT_x}{dz}\right)dx\,dy\,dz,$$

$$\left(\frac{dT_y}{dx}+\frac{dT_x}{dy}+\frac{dN_z}{dz}\right)dx\,dy\,dz.$$

Bildet man weiter die Ausdrücke für die drei Kräftepaare, welche aus obigem Kräftesystem resultiren, so findet man sofort, dass dieselben sämmtlich verschwinden.

Da nun endlich die äusseren und inneren Kräfte an dem betrachteten Parallelepipedon im Gleichgewichte stehen sollen, so enthält also folgendes Gleichungssystem, dem in jedem Punkte des elastischen Körpers Genüge geleistet werden muss, die nothwendigen, aber auch hinreichenden Bedingungen für das Gleichgewicht desselben:

$$\text{III.}\quad \begin{cases} \dfrac{dN_x}{dx}+\dfrac{dT_z}{dy}+\dfrac{dT_y}{dz}+\varrho X_i=0, \\ \dfrac{dT_z}{dx}+\dfrac{dN_y}{dy}+\dfrac{dT_x}{dz}+\varrho Y_i=0, \\ \dfrac{dT_y}{dx}+\dfrac{dT_x}{dy}+\dfrac{dN_z}{dz}+\varrho Z_i=0. \end{cases}$$

Ohne Schwierigkeit lässt sich nachträglich zeigen, dass die Ausdrücke für die Kräfte X_0, Y_0, Z_0 und X_i, Y_i, Z_i, wie sie durch die Gleichungen II) und III) bestimmt werden, den Gleichungen I) Genüge thun. Integriren wir z. B. die erste der Gleichungen III), nachdem dieselbe mit $dx\,dy\,dz$ multiplicirt worden ist, in der ganzen Ausdehnung des Körpers, so kommt:

$$\iiint \frac{dN_x}{dx} dx\,dy\,dz + \iiint \frac{dT_z}{dy} dx\,dy\,dz$$
$$+ \iiint \frac{dT_y}{dz} dx\,dy\,dz + \iiint \varrho X_i\, dx\,dy\,dz = 0.$$

In jedem der drei ersten Integrale ist eine Integration ausführbar; dadurch wird das erste z. B.:

$$\iint [N_x]\, dy\,dz,$$

worin $[N_x]$ die Differenz der Werthe von N_x in den beiden Punkten bedeutet, in welchen eine Parallele zur x-Axe die Oberfläche des Körpers schneidet (wenn wir der Einfachheit wegen nur zwei solcher Durchschnittspunkte voraussetzen). Bedeuten aber do das Oberflächenelement, α, β, γ die Winkel, welche die nach aussen gerichtete Normale der Oberfläche mit den Axen bildet, so kann man für das obige Integral schreiben:

$$\int N_x \cos\alpha\, do.$$

Behandelt man die beiden folgenden Integrale in ähnlicher Weise, so kann man statt obiger Gleichung folgende schreiben:

$$\int (N_x \cos\alpha + T_z \cos\beta + T_y \cos\gamma)\, do + \iiint \varrho X_i\, dx\,dy\,dz = 0.$$

Nach der ersten der Gleichungen II) wird diese Gleichung:

$$\int X_0\, do + \int X_i \varrho\, dk = 0,$$

was die erste der zu beweisenden Gleichungen I) ist. Ebenso beweist man die beiden folgenden. Um weiter z. B. die vierte zu beweisen, bildet man aus den Gleichungen III) die folgende:

$$\iiint \left(x \frac{dT_z}{dx} - y \frac{dN_x}{dx}\right) dx\,dy\,dz$$
$$+ \iiint \left(x \frac{dN_y}{dy} - y \frac{dT_z}{dy}\right) dx\,dy\,dz$$
$$+ \iiint \left(x \frac{dT_x}{dz} - y \frac{dT_y}{dz}\right) dx\,dy\,dz$$
$$+ \iiint \varrho\,(Y_i x - X_i y)\, dx\,dy\,dz = 0.$$

Addiren wir zu der Function im ersten Integrale T_z und subtrahiren dieselbe Grösse von derjenigen im zweiten Integrale, so wird vorstehende Gleichung:

$$\iiint \frac{d(xT_z - yN_x)}{dx}\,dx\,dy\,dz$$
$$+\iiint \frac{d(xN_y - yT_z)}{dy}\,dx\,dy\,dz$$
$$+\iiint \frac{d(xT_x - yT_y)}{dz}\,dx\,dy\,dz$$
$$+\iiint \varrho\,(Y_i x - X_i y)\,dx\,dy\,dz = 0.$$

Hierfür erhalten wir aber wieder wie vorher:

$$\int \{(xT_z - yN_x)\cos\alpha + (xN_y - yT_z)\cos\beta + (xT_x - yT_y)\cos\gamma\}\,do$$
$$+\iiint \varrho\,(Y_i x - X_i y)\,dx\,dy\,dz = 0;$$

oder:

$$\int \{x(T_z\cos\alpha + N_y\cos\beta + T_x\cos\gamma) - y(N_x\cos\alpha + T_z\cos\beta + T_y\cos\gamma)\}\,do$$
$$+\int \varrho\,(Y_i x - X_i y)\,dk = 0;$$

oder mit Rücksicht auf die Gleichungen II):

$$\int (xY_0 - yX_0)\,do + \int \varrho\,(Y_i x - X_i y)\,dk = 0,$$

welches die vierte der Gleichungen I) ist.

Für die Gleichungen III) kann man auch, indem man die Grössen N und T durch ihre früher aufgestellten Ausdrücke ersetzt, schreiben:

$$\text{IV.}\quad \begin{cases} (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dx} + \mu\left(\dfrac{d^2\xi}{dx^2} + \dfrac{d^2\xi}{dy^2} + \dfrac{d^2\xi}{dz^2}\right) + \varrho X_i = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dy} + \mu\left(\dfrac{d^2\eta}{dx^2} + \dfrac{d^2\eta}{dy^2} + \dfrac{d^2\eta}{dz^2}\right) + \varrho Y_i = 0, \\ (\lambda+\mu)\dfrac{d\theta}{dz} + \mu\left(\dfrac{d^2\zeta}{dx^2} + \dfrac{d^2\zeta}{dy^2} + \dfrac{d^2\zeta}{dz^2}\right) + \varrho Z_i = 0. \end{cases}$$

Ein Blick auf die letzten Gleichungen, welche wir in der Folge schlechthin die Elasticitätsgleichungen nennen werden, belehrt uns, dass solche Systeme von Verschiebungen und Kräften, die einzeln den Gleichungen genügen, auch dann, wenn man sie über einander lagert, einen neuen Gleichgewichtszustand liefern; die neuen Kräfte sind die Resultanten der ursprünglichen Kräfte, sowie auch die neuen Verschiebungen aus den Summen der gleichgerichteten ursprünglichen Verschiebungen bestehen. Dieses Princip der Coexistenz möglicher Gleichgewichtszustände ist für die Forschung von grosser Wichtig-

keit, indem es dieselbe in erheblicher Weise vereinfacht. Insbesondere lassen sich an dasselbe folgende Betrachtungen über das Problem knüpfen, den Zustand des elastischen Gleichgewichtes eines Körpers von gegebener Form zu bestimmen, der einem Systeme von Kräften X_i, Y_i, Z_i, die an seinen körperlichen Elementen angreifen, und einem Systeme von Kräften X_0, Y_0, Z_0, die an seiner Oberfläche wirken, ausgesetzt ist. Um das erwähnte Problem zu lösen, hat man zuerst eine Deformation ξ_i, η_i, ζ_i zu bestimmen, die, mit den Kräften X_i, Y_i, Z_i zusammengebracht, den Elasticitätsgleichungen genügt. Bezeichnet man die Elasticitätskräfte, welche durch jene Deformation an der Oberfläche des Körpers entwickelt werden oder hier anzubringen sind, um Gleichgewicht zu halten, durch X_e, Y_e, Z_e, so bestimmt man ferner das System ξ_0, η_0, ζ_0 von Verschiebungen, welches den Elasticitätsgleichungen, nachdem in diesen die Glieder ϱX_i, ϱY_i, ϱZ_i unterdrückt worden, genügt, und für welches überdies die Componenten der an der Oberfläche entwickelten Elasticitätskräfte mit den Differenzen $X_0 - X_e$, $Y_0 - Y_e$, $Z_0 - Z_e$ zusammenfallen. Die durch die Verschiebungen $\xi_i + \xi_0$, $\eta_i + \eta_0$, $\zeta_i + \zeta_0$ bestimmte Deformation ist alsdann die verlangte, denn ihr entspricht zugleich das System der Kräfte X_i, Y_i, Z_i und das der Kräfte X_0, Y_0, Z_0.

Einem gegebenen Systeme von Kräften X_i, Y_i, Z_i entsprechen unendlich viele Systeme von Verschiebungen. Die Differenzen entsprechender Componenten der letzteren bilden aber stets eine Deformation, für welche die Kräfte X_i, Y_i, Z_i verschwinden. Einem gegebenen Systeme von Kräften X_0, Y_0, Z_0, die an der Oberfläche wirken, entspricht im Allgemeinen nur ein einziges System von Verschiebungen, dem sich keine Kräfte zuordnen, die an den körperlichen Elementen angreifen. Wenn nämlich die Systeme ξ_i', η_i', ζ_i' und ξ_i'', η_i'', ζ_i'' sich den Kräften X_i, Y_i, Z_i zuordnen, so entsprechen die Verschiebungen $\xi_i' - \xi_i''$, $\eta_i' - \eta_i''$, $\zeta_i' - \zeta_i''$ nur solchen Kräften, die an der Oberfläche wirken. Und wären ξ_0', η_0', ζ_0' und ξ_0'', η_0'', ζ_0'' zwei Deformationen, die sich auf blosse Oberflächenkräfte beziehen, so wäre $\xi_0' - \xi_0''$, $\eta_0' - \eta_0''$, $\zeta_0' - \zeta_0''$ eine

Deformation, bei welcher sowohl die Kräfte X_i, Y_i, Z_i, wie auch X_0, Y_0, Z_0 verschwänden. Wenn aber letztere verschwinden, so befindet sich der Körper in seinem natürlichen Zustande, für den die Verschiebungen ebenfalls Null sind. Es gilt letzteres wenigstens, wenn wir von solchen Deformationen ganz absehen, wobei sich im Verlaufe der Functionen ξ, η, ζ innerhalb des Körpers Discontinuitäten darbieten.

4. Das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten, auf elastische Körper angewandt.

Wie die Entwickelungen, welche uns zu den Gleichgewichts-Gleichungen eines elastischen Körpers geführt, ersehen lassen, kann die Wirkung, welche ein cubisches Element dk, als Ganzes betrachtet, von dem ihm zunächst gelegenen Theile des Körpers erleidet, durch eine einzige im Schwerpunkte des Elementes angreifende Kraft dargestellt werden, für deren Componenten sich ergibt:

$$X = \left(\frac{dN_x}{dx} + \frac{dT_z}{dy} + \frac{dT_y}{dz}\right) dk,$$

$$Y = \left(\frac{dT_z}{dx} + \frac{dN_y}{dy} + \frac{dT_x}{dz}\right) dk,$$

$$Z = \left(\frac{dT_y}{dx} + \frac{dT_x}{dy} + \frac{dN_z}{dz}\right) dk.$$

Es gilt dies auch von den an der Oberfläche anliegenden Elementen, insofern an diesen die auf die Oberfläche wirkenden Zug- oder Druckkräfte sich ebenso verhalten, wie die an der Oberfläche der Elemente im Innern wirkenden Elasticitätskräfte.

In dem Falle des Gleichgewichtes muss dem Princip der virtuellen Geschwindigkeiten gemäss die Gesammtarbeit verschwinden, welche bei irgend einer Verschiebung des Systems geleistet wird, die mit der Natur des letzteren vereinbar ist, und wobei sämmtliche Theilchen verschwindend kleine Wege beschreiben. Jene Arbeit kommt nämlich der Hälfte des Zuwachses an lebendiger Kraft gleich, und dieser muss — wofern, wie hier unterstellt wird, nur die erste Potenz des Unendlich-Kleinen berücksichtigt wird — für den Fall des Gleichgewichtes verschwinden. Nun kann aber die Zurückführung in

den ursprünglichen Zustand bei dem deformirten elastischen Körper als eine zulässige Verschiebung betrachtet werden, und hierbei sind die Componenten der Verschiebung eines Elementes dk bezüglich $-\xi$, $-\eta$, $-\zeta$; die Projection der Verschiebung auf die Richtung der Kraft, die virtuelle Geschwindigkeit, sei δp. Mit Rücksicht hierauf haben wir folgende, unter dem Namen des Clapeyron'schen Theorems bekannte Beziehung:

$$\int P \delta p \, dk = 0,$$

wo für P die oben aufgeführten Elasticitätskräfte zu setzen sind, wenn wir von den Kräften P_i absehen. Obige Gleichung lässt mehrfache Umformungen zu. Man hat erstlich:

$$-\int P \delta p \, dk = \int (X\xi + Y\eta + Z\zeta) \, dk,$$

wo für X, Y, Z die oben aufgeführten Ausdrücke einzusetzen sind. Der Theil des letzten Integrals, welcher die Componente ξ enthält, schreibt sich:

$$\int dx \int dy \int \left(\frac{dN_x}{dx} + \frac{dT_z}{dy} + \frac{dT_y}{dz} \right) \xi \, dz.$$

Durch theilweise Integration findet man hierfür:

$$\int dy \int \left([N_x \xi] - \int N_x \frac{d\xi}{dx} dx \right) dz$$
$$+ \int dx \int \left([T_z \xi] - \int T_z \frac{d\xi}{dy} dy \right) dz$$
$$+ \int dx \int \left([T_y \xi] - \int T_y \frac{d\xi}{dz} dz \right) dy.$$

Hier ist für die eckigen Klammern die Differenz zu setzen, deren Minuend der Werth des eingeklammerten Ausdruckes an der oberen Grenze, und deren Subtrahend der Werth desselben Ausdruckes an der unteren Grenze der ausgeführten Integration ist. Für den obigen Ausdruck kann man nun ferner in derselben Weise, wie im vorigen Abschnitte, wenn wieder α, β, γ die Winkel sind, welche die nach aussen gerichtete Normale des Oberflächenelementes do mit den Axen bildet, schreiben:

$$\int (N_x \cos\alpha + T_z \cos\beta + T_y \cos\gamma) \, \xi \, do$$
$$- \int \left(N_x \frac{d\xi}{dx} + T_z \frac{d\xi}{dy} + T_y \frac{d\xi}{dz} \right) dk.$$

Mit Rücksicht auf letzteres Ergebniss und auf die früher gefundenen Ausdrücke für die Componenten der Elasticitätskraft und der Kräfte N und T findet man endlich:

$$\int (X_0\xi_0 + Y_0\eta_0 + Z_0\xi_0)\, do$$
$$= \frac{1}{\mu}\int \{\tfrac{1}{2}(N_x^2+N_y^2+N_z^2-\lambda\theta[N_x+N_y+N_z]) + (T_x^2+T_y^2+T_z^2)\}\, dk,$$

wo X_0, Y_0, Z_0 die Componenten der auf das Element do der Oberfläche wirkenden Zug- oder Druckkraft P_0, und ξ_0, η_0, ζ_0 die Verschiebungen dieses Elementes nach den Axen sind.

Indem man die Hauptelasticitätskräfte N_x, N_y, N_z einführt, kann man schreiben:

$$\int P_0\,\delta p_0\, do = \frac{1}{2\mu}\int (N_x^2+N_y^2+N_z^2-\lambda\theta[N_x+N_y+N_z])\, dk.$$

Und wenn man die Kräfte N durch die linearen Dilatationen D nach den drei Hauptaxen der Elasticitätsfläche ausdrückt, so ergibt sich die folgende Gleichung:

$$\int P_0\,\delta p_0\, do = \int (2\mu[D_x^2+D_y^2+D_z^2]+\lambda\theta^2)\, dk.$$

Der in den obigen Gleichungen links stehende Ausdruck stellt die Arbeit dar, welche von den auf die Oberfläche wirkenden Kräften geleistet wird; auf der rechten Seite steht die negative Arbeit, welche bei der Zurückführung in den ursprünglichen Zustand von den Elasticitätskräften geleistet würde, wenn letztere während der Zurückführung dieselben blieben, wie in dem Zustande der Deformation.

5. Ueber zwei allgemeinere Gruppen von Verschiebungen.

Von den Kräften, welche auf die kleinsten Theilchen der Körper in distans wirken, sind zwei Hauptarten näher bekannt, die hier durch die Benennung der attractorischen (resp. repulsatorischen) und der rotatorischen Kräfte unterschieden werden mögen. Die Kräfte der ersten Art sind dadurch characterisirt, dass die Componenten der Wirkung, welche die in einem Punkte (x, y, z) concentrirte Einheit der afficirten Materie durch dieselben erfährt, folgende Form haben:

$$X_i = \int \sigma \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} dk, \quad Y_i = \int \sigma \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} dk, \quad Z_i = \int \sigma \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} dk.$$

Hier bedeutet r die Entfernung des Punktes (x, y, z) von dem cubischen Elemente dk eines bestimmten Raumes, über welchen sich die angedeutete Integration erstreckt; ferner stellt σ eine Function der Coordinaten von dk vor, von welcher angenommen werde, dass sie sich stetig ändere. Bekanntlich kann die durch die angeführten Componenten bestimmte Kraft betrachtet werden als Resultante von Anziehungen, welche von den Elementen dk ausgehen und dem Newton'schen Gravitationsgesetze gehorchen. Und wenn insbesondere jene Kräfte mit der allgemeinen Gravitation identisch sein sollen, so ist für σ das Product aus der Gravitationsconstanten (Anziehung der Masse Eins durch die Masse Eins in der Entfernung Eins) und der Dichtigkeit der Materie des Elementes dk zu setzen. Unter die hier besprochene Art von Kräften gehört auch die electro-electrische und die magneto-magnetische Anziehung. Der Ausdruck:

$$\int \frac{\sigma}{r} dk = U$$

heisst bekanntlich das Potential der Materie, von welcher die Kräfte ausgehen, und mittelst desselben lassen sich die erwähnten Componenten wie folgt ausdrücken:

$$X_i = \frac{dU}{dx}, \qquad Y_i = \frac{dU}{dy}, \qquad Z_i = \frac{dU}{dz}.$$

Unter rotatorischen Kräften werden wir solche verstehen, deren Componenten sich wie folgt darstellen:

$$X_i = \int \left[B \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} - C \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} \right] dk,$$

$$Y_i = \int \left[C \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} - A \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} \right] dk,$$

$$Z_i = \int \left[A \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} - B \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} \right] dk.$$

Hier sollen sich die Integrationen wiederum über die cubischen Elemente dk eines und desselben Raumes erstrecken; die Grössen A, B, C sind stetige Functionen der Coordinaten von dk und r die Entfernung desselben Elementes von dem Punkte (x, y, z), in dem sich die Einheit der Materie befindet, welche von den Kräften sollicitirt wird. Die Kraft, deren Componenten oben angeführt sind, lässt sich nach den Gesetzen der Electrodynamik, wofern der Punkt (x, y, z) ausserhalb des Raumes liegt, auf den sich die Integration bezieht, ansehen als die Wirkung, welche die im Punkte (x, y, z) befindliche Einheit des magnetischen Fluidums durch constant bleibende, lineare Stromelemente erleidet, welche in dem cubischen Elemente dk liegen. Die Cosinus der Winkel, welche die Richtung des linearen Elementes mit den Coordinatenaxen einschliesst, verhalten sich wie $A : B : C$. Ferner kommt die Grösse

$$\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}\,.\,dk$$

gleich dem Producte aus dem Querschnitte, der Länge, der Intensität des Stromelementes und einer Constanten.

Diese Constante liefert, mit der Länge und dem Querschnitte des Stromelementes multiplicirt, die Wirkung, welche das letztere, wenn seine Intensität gleich Eins wäre, auf die Einheit des magnetischen Fluidums ausüben würde, letzteres in einem Punkte der Normalebene des Elementes und in der Entfernung Eins von demselben gedacht.

Jeder der beiden oben erörterten Arten von Kräften ordnet sich eine Hauptart von Verschiebungen zu, die mit jenen einen möglichen Gleichgewichtszustand für den von den Kräften sollicitirten elastischen Körper ausmachen.

Wenn der elastische Körper erstlich von attractorischen Kräften afficirt ist, so setze man:

$$\xi = \frac{dV}{dx}, \quad \eta = \frac{dV}{dy}, \quad \zeta = \frac{dV}{dz},$$

wo gesetzt werde:

$$V = \int \frac{\tau}{r}\, dk.$$

Letztere Integration erstrecke sich über die cubischen Elemente eines Raumes, der den elastischen Körper ganz umschliesst.

Sollen nun die aufgeführten Verschiebungen im Verein mit den Kräften:

$$X_i = \frac{dU}{dx}, \quad Y_i = \frac{dU}{dy}, \quad Z_i = \frac{dU}{dz}$$

einen Gleichgewichtszustand bestimmen, der mit den Elasticitätsgesetzen im Einklang steht, so muss, wie die Substitution in die Elasticitätsgleichungen ergibt, der Ausdruck:

$$(\lambda + 2\mu)\,\Delta^2 V + \varrho U,$$

in welchem $\Delta^2 V$ für den Ausdruck:

$$\frac{d^2V}{dx^2} + \frac{d^2V}{dy^2} + \frac{d^2V}{dz^2}$$

gesetzt ist, in der ganzen Ausdehnung des elastischen Körpers einen constanten Werth aufweisen. Nun ist aber nach einem bekannten Satze von der Potentialfunction:

$$\Delta^2 V = -4\pi\tau,$$

und hiernach wird die erwähnte Bedingung erfüllt, wenn man setzt:

$$\tau = \frac{\varrho}{4\pi(\lambda+2\mu)} U.$$

Bei der so bestimmten Deformation hat man für die cubische Dilatation:

$$\theta = \Delta^2 V.$$

Durch das obige Verfahren ist man in den Stand gesetzt, die Betrachtung der äusseren Kräfte zu eliminiren. Man bemerke aber überdies, dass überhaupt von der Wirkung derselben in den allermeisten Fällen abgesehen werden kann, weil sie gegen die der Druck- und Zugkräfte verschwindet.

Wenn keine äusseren Kräfte auf die Molecüle des elastischen Körpers einwirken, so genügen dem Obigen zufolge die Verschiebungen:

$$\xi = \frac{dV}{dx}, \quad \eta = \frac{dV}{dy}, \quad \zeta = \frac{dV}{dz}$$

den Elasticitätsgleichungen, wenn man setzt:

$$V = \int \frac{\tau}{r}\, dk$$

und das Integral über einen beliebigen den Körper ganz einschliessenden Raum sich erstrecken, überdies aber die Grösse τ

in der ganzen Ausdehnung des Körpers constant werden lässt. Bei dieser Deformation nimmt die Dilatation den im Innern des Körpers constanten Werth τ an.

Die hier betrachteten Verschiebungen mögen attractorische genannt werden. Sie finden statt in der Richtung der Kraftlinien, welche sich dem Potentiale V zuordnen, und stehen also auf den Gleichgewichtsflächen desselben Potentials senkrecht. Ihre Grösse bestimmt sich durch die Steigung des Potentials in der Richtung der von innen nach aussen gerechneten Normalen der Gleichgewichtsflächen und stellt sich, unter $\frac{d\ldots}{dn}$ eine Differentiation nach einer solchen Normale verstanden, dar durch den Differentialquotienten $\frac{dV}{dn}$.

Zerlegt man die Elasticitätskraft, welche auf einem Elemente einer Niveaufläche entwickelt wird, nach der Richtung der von innen nach aussen gerichteten Normale n und den Tangenten t_1, t_2 der beiden Hauptschnitte, so findet man:

$$N = 2\mu \frac{d^2V}{dn^2}, \quad T_1 = 2\mu \frac{d^2V}{dn\,dt_1}, \quad T_2 = 2\mu \frac{d^2V}{dn\,dt_2}.$$

Die Tangentialkräfte verschwinden stets, wenn die durch das Element gehende Kraftlinie gerade wird, weil dann $\frac{dV}{dt_1}$ und $\frac{dV}{dt_2}$ in allen Punkten dieser Linie verschwinden.

Ein elastischer Körper werde zweitens von rotatorischen Kräften sollicitirt und zwar sei:

$$X_i = \int \left[B \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} - C \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} \right] dk,$$

$$Y_i = \int \left[C \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} - A \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} \right] dk,$$

$$Z_i = \int \left[A \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} - B \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} \right] dk,$$

wo sich die Integration wieder über den Raum erstreckt, welcher die Materie einschliesst, von der die Kräfte ausgehen.

Man setze nun:

$$\xi = \int \left[b \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} - c \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} \right] dk,$$

$$\eta = \int \left[c \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} - a \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} \right] dk,$$

$$\zeta = \int \left[a \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} - b \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} \right] dk,$$

wo a, b, c Functionen der Coordinaten des Elementes dk sind, und wo die Integration über einen Raum ausgedehnt sei, der den elastischen Körper ganz umschliesst, übrigens aber beliebig begrenzt ist.

Die cubische Dilatation, welche sich den angegebenen Verschiebungen zuordnet, verschwindet stets. Ferner findet man:

$$\Delta^2 \xi = -4\pi \left(\frac{db}{dz} - \frac{dc}{dy} \right), \quad \Delta^2 \eta = -4\pi \left(\frac{dc}{dx} - \frac{da}{dz} \right),$$

$$\Delta^2 \zeta = -4\pi \left(\frac{da}{dy} - \frac{db}{dx} \right).$$

Mit Rücksicht hierauf liefert die Substitution der oben stehenden Ausdrücke für die Verschiebungen und Kräfte in die Elasticitätsgleichungen, dass letztere befriedigt werden, wenn man setzt:

$$a = \frac{\varrho}{4\pi\mu} \int \frac{A}{r} dk, \quad b = \frac{\varrho}{4\pi\mu} \int \frac{B}{r} dk, \quad c = \frac{\varrho}{4\pi\mu} \int \frac{C}{r} dk,$$

wo die Integrationen über denselben Raum, wie bei den Componenten der äusseren Kräfte, auszudehnen sind.

Die Componenten der rotatorischen Kräfte lassen sich wie folgt schreiben:

$$X_i = \frac{dV}{dz} - \frac{dW}{dy}, \quad Y_i = \frac{dW}{dx} - \frac{dU}{dz}, \quad Z_i = \frac{dU}{dy} - \frac{dV}{dx},$$

woraus man ersieht, dass die Summe der Derivationen nach der bezüglichen Coordinate verschwindet. Ein Gleiches gilt

für die Componenten der Verschiebungen, für welche man schreiben kann:

$$\xi = \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}, \quad \eta = \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}, \quad \zeta = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}.$$

Wenn die Kräfte von der electromagnetischen Wirkung solcher Ströme herrühren, die in einem Leiter durch ein von electrischen Massen herrührendes Potential φ in dem ersten Momente der Wirkung entstehen, so ist

$$A : \frac{d\varphi}{dx} = B : \frac{d\varphi}{dy} = C : \frac{d\varphi}{dz}$$

zu setzen. Und wenn insbesondere jene Ströme geschlossen sind, so lassen sich die Componenten der Kräfte als die partiellen Differentialquotienten des Potentials magnetischer Massen darstellen, die auf der Oberfläche des Leiters vertheilt sind, in Uebereinstimmung damit, dass die Summe der ersten Differentialquotienten der Componenten verschwindet (ausserhalb und innerhalb des Leiters). Auch die Componenten der Verschiebungen werden dann partielle Differentialquotienten einer einzigen Function nach den Coordinaten.

Wenn die im Obigen durch U, V, W bezeichneten Grössen partielle Differentialquotienten derselben Function nach den Coordinaten sind, so verschwinden die Kräfte, und dem entsprechend erhalten wir für die Componenten der Verschiebungen, unter ψ eine willkürliche Function verstanden, die folgenden Ausdrücke:

$$\xi = \int \left[\frac{d\psi}{dy'} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} - \frac{d\psi}{dz'} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} \right] dk,$$

$$\eta = \int \left[\frac{d\psi}{dz'} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} - \frac{d\psi}{dx'} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dz} \right] dk,$$

$$\zeta = \int \left[\frac{d\psi}{dx'} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dy} - \frac{d\psi}{dy'} \cdot \frac{d\left(\frac{1}{r}\right)}{dx} \right] dk,$$

wo x', y', z' die Coordinaten des Elementes dk sind, und wo die Integration sich über einen Raum erstreckt, welcher den Körper ganz umschliesst. Nimmt man für ψ das Potential

electrischer Massen, so können jene Verschiebungs-Componenten aufgefasst werden als Componenten der electromagnetischen Wirkung solcher Ströme, die in dem leitend gedachten Raume, über den sich die Integration erstreckt, durch die electrischen Massen im ersten Momente ihrer Thätigkeit hervorgerufen werden, wenigstens für solche Punkte, die ausserhalb des durchströmten Raumes liegen. Die im Obigen näher erörterten Deformationen, welche nie von einer cubischen Dilatation begleitet sind, mögen in der Folge rotatorische Deformationen genannt werden.

6. Anwendung der Elasticitätsgleichungen auf Erforschung specieller Fälle des Elasticitätsgleichgewichtes.

1. Wenn die Deformation des elastischen Körpers darin besteht, dass sämmtliche Theilchen in parallelen Richtungen verschoben werden, und zwar so, dass die Grösse der Verschiebung für die Theilchen einer jeden auf jener Richtung senkrechten Ebene dieselbe ist, so hat man, wenn die z-Axe mit der Richtung der Verschiebung parallel gelegt wird:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = f(z),$$

wo f weder x noch y enthält. Durch diese Annahme wird den beiden ersten Elasticitätsgleichungen genügt, die dritte aber liefert zur Bestimmung der Function f:

$$\frac{d^2 f}{dz^2} = 0,$$

woraus folgt:

$$f = cz + d = \widetilde{c}(z - z_0).$$

Aus letzterem Ausdrucke ersehen wir, dass sich bei schicklicher Wahl der Coordinatenaxen die oben bestimmte Deformation vereinbart mit den Elasticitätsgesetzen, wenn man setzt:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = cz.$$

Hier ist c eine willkürliche Constante, die in allen vorkommenden Fällen sehr klein ist und der linearen Dilatation in der Richtung der Verschiebung, d. h. der Veränderung gleichkommt, welche die Linieneinheit in der Richtung der Verschie-

bung erleidet. Für die cubische Dilatation ergibt sich hier natürlich ebenfalls der constante Werth c.

Was die Componenten N, T der Elasticitätskräfte betrifft, so bleiben nur die Normalkräfte, welche folgende Werthe haben:

$$N_x = N_y = \lambda c, \quad N_z = (\lambda + 2\mu)\, c.$$

Wenn daher der Körper durch eine zur z-Axe senkrechte Ebene begrenzt ist, so erleidet diese den constanten Druck oder Zug $(\lambda + 2\mu)\, c$. Eine mit jener Axe parallele Grenzfläche erleidet für den Fall des Gleichgewichtes den constanten Druck oder Zug λc.

Der hier betrachtete Gleichgewichtszustand findet seine Anwendung bei einem Prisma.

Durch die oben angegebene allgemeine Methode ergibt sich dieser Gleichgewichtszustand, wenn man für V die Potentialfunction Az^2 zu Grunde legt, deren Gleichgewichtsflächen parallele Ebenen sind.

2. Setzt man:

$$\xi = f(z), \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0,$$

so erhält man eine Deformation, wobei die Theilchen, welche auf einer zur z-Axe senkrechten Ebene liegen, ihre gegenseitige Lage nicht ändern, und wobei auch die Theilchen einer zur y-Axe senkrechten Ebene die letztere nicht verlassen, wohl aber gegen einander verschoben werden. Die Deformation kann also auch betrachtet werden als Verschiebung der zur z-Axe senkrechten Ebenen in der Richtung der x-Axe. Wie die Substitution in die Elasticitätsgleichungen liefert, ist zu setzen:

$$\frac{d^2\xi}{dz^2} = 0,$$

woraus wieder folgt:

$$f(z) = az + b,$$

oder, da es sich nur um relative Lagen handelt:

$$\xi = az.$$

Die Verschiebung einer zur z-Axe senkrechten Ebene ist folglich proportional mit der Entfernung von der xy-Ebene, welche letztere keine Verschiebung erleidet und als neutrale Ebene auftritt. Man denke sich den Körper durch drei Paare

von Ebenen begrenzt, die den Coordinatenebenen parallel sind. Alsdann ergibt sich, dass im Falle des Gleichgewichtes die zur y-Axe senkrechten Seitenflächen keinerlei Zug oder Druck erleiden. Die zur z-Axe senkrechten Seitenflächen aber erleiden einen tangentialen Zug, dessen Richtung mit der der Verschiebung jener Flächen zusammenfällt, und für welchen die sämmtlichen Zugkräfte ein Kräftepaar liefern, dessen Moment $\mu a V$ ist, unter V das Volumen des Körpers verstanden. Ebenso wirken an den zur x-Axe senkrechten Flächen tangentiale, nach der z-Axe gerichtete Zugkräfte, welche ein Kräftepaar bilden, dessen Moment dem des ersteren entgegengesetzt gleich ist. Eine Dilatation findet bei der besprochenen Deformation nicht statt. Letztere gehört nämlich zu der Art der rotatorischen Deformationen, indem die Verschiebung, von constanten Theilen abgesehen, proportional und gleichgerichtet mit der electromagnetischen Kraft ist, welche ein linearer Strom ausübt, der in der yz-Ebene parallel mit der y-Axe im Unendlichen liegt.

3. Wenn man die Annahmen macht:

$$\xi = f(r)\cos\alpha, \quad \eta = f(r)\cos\beta, \quad \zeta = 0,$$

oder:

$$\xi = \frac{x}{r}f(r), \quad \eta = \frac{y}{r}f(r), \quad \zeta = 0,$$

wo r die Entfernung von der z-Axe und α, β die Winkel bedeuten, welche das auf die z-Axe herabgelassene Perpendikel r mit den beiden anderen Axen bildet, so sind die in der Richtung der Radien r stattfindenden Verschiebungen in allen Punkten eines Cylinders gleich gross, dessen Axe mit der z-Axe zusammenfällt, und es bewegen sich die Theilchen, welche in einer zur z-Axe senkrechten Ebene liegen, strahlig von dieser Axe fort oder nach derselben hin, ohne ihre Ebenen zu verlassen. Setzt man, um über die Zulässigkeit jener Annahme Aufschluss zu erhalten, die Ausdrücke von ξ, η, ζ in die Elasticitätsgleichungen, so findet man sofort, dass die letzte an sich befriedigt wird; die beiden ersten führen dagegen zur Bestimmung der Function f. Für die erste findet man Folgendes:

$$\frac{d\xi}{dx}=\frac{f}{r}-\frac{x^2}{r^3}f+\frac{x^2}{r^2}\cdot\frac{df}{dr}=\frac{y^2}{r^3}f+\frac{x^2}{r^2}\cdot\frac{df}{dr};$$

$$\frac{d\xi}{dy}=-\frac{xy}{r^3}f+\frac{xy}{r^2}\cdot\frac{df}{dr};$$

$$\frac{d\eta}{dy}=\frac{f}{r}-\frac{y^2}{r^3}f+\frac{y^2}{r^2}\cdot\frac{df}{dr}=\frac{x^2}{r^3}f+\frac{y^2}{r^2}\cdot\frac{df}{dr};$$

$$\frac{d\xi}{dz}=0.$$

Hieraus folgt zunächst:

$$\theta=\frac{d\xi}{dx}+\frac{d\eta}{dy}+\frac{d\zeta}{dz}=\frac{f}{r}+\frac{df}{dr}.$$

Weiter findet man:

$$\frac{d^2\xi}{dx^2}=-\frac{3xy^2}{r^5}f+\frac{xy^2}{r^4}\cdot\frac{df}{dr}+\frac{2x}{r^2}\cdot\frac{df}{dr}-\frac{2x^3}{r^4}\cdot\frac{df}{dr}+\frac{x^3}{r^3}\cdot\frac{d^2f}{dr^2}$$

$$=-\frac{3xy^2}{r^5}f+\frac{3xy^2}{r^4}\cdot\frac{df}{dr}+\frac{x^3}{r^3}\cdot\frac{d^2f}{dr^2};$$

$$\frac{d^2\xi}{dy^2}=-\frac{x}{r^3}f+\frac{3xy^2}{r^5}f-\frac{xy^2}{r^4}\cdot\frac{df}{dr}+\frac{x}{r^2}\cdot\frac{df}{dr}-\frac{2xy^2}{r^4}\cdot\frac{df}{dr}+\frac{xy^2}{r^3}\cdot\frac{d^2f}{dr^2}$$

$$=-\frac{x}{r^3}f+\frac{3xy^2}{r^5}f+\frac{x}{r^2}\cdot\frac{df}{dr}-\frac{3xy^2}{r^4}\cdot\frac{df}{dr}+\frac{xy^2}{r^3}\cdot\frac{d^2f}{dr^2};$$

$$\frac{d^2\xi}{dz^2}=0.$$

Also hat man weiter:

$$\Delta^2\xi=-\frac{x}{r^3}f+\frac{x}{r^2}\cdot\frac{df}{dr}+\frac{x}{r}\cdot\frac{d^2f}{dr^2}=\frac{x}{r}\cdot\frac{d\left(\frac{f}{r}+\frac{df}{dr}\right)}{dr}.$$

Durch Einsetzung dieser Werthe in die erste Elasticitätsgleichung erhält man endlich:

$$(\lambda+\mu)\frac{x}{r}\cdot\frac{d\left(\frac{f}{r}+\frac{df}{dr}\right)}{dr}+\mu\frac{x}{r}\cdot\frac{d\left(\frac{f}{r}+\frac{df}{dr}\right)}{dr}=0,$$

welche Gleichung sich sofort auf folgende reducirt:

$$\frac{d\left(\frac{f}{r}+\frac{df}{dr}\right)}{dr}=0.$$

Ganz dasselbe ergibt die zweite Elasticitätsgleichung zur Bestimmung der Function f.

Eine erste Integration dieser Gleichung liefert:

$$\frac{1}{r}f+\frac{df}{dr}=Const.,$$

oder:

$$\frac{d(rf)}{dr}=r\,.\,Const.,$$

woraus man durch nochmalige Integration findet:

$$f=ar+\frac{b}{r},$$

unter a und b willkürliche Constanten verstanden.

Es leuchtet ein, dass die so bestimmte Deformation sich aus zwei Deformationen zusammensetzen lässt, deren Verschiebungen folgende sind:

$$\xi_1=ax, \quad \eta_1=ay, \quad \zeta_1=0;$$
$$\xi_2=\frac{bx}{r^2}, \quad \eta_2=\frac{by}{r^2}, \quad \zeta_2=0.$$

Die erste dieser Deformationen lässt sich aus dem Potentiale Ar^2 mit cylindrischen Niveauflächen ableiten. Bei derselben nehmen die Verschiebungen an Grösse zu proportional dem Abstande von der Axe, und es wird die neue Figur eines zur z-Axe senkrechten Schnittes der ursprünglichen Figur ähnlich und ähnlich gelegen. Die lineare Dilatation in jeder zur neutralen z-Axe senkrechten Richtung beträgt a, die cubische hat den Werth $2a$. Was die an der Oberfläche anzubringenden Kräfte betrifft, so wird:

$$N_x=N_y=2(\lambda+\mu)a, \quad N_z=2\lambda a, \quad T_x=T_y=T_z=0.$$

Hiernach ist auf einer zur z-Axe senkrechten Grenzfläche die constante Kraft $2\lambda a$ und auf einer Grenzfläche, die mit jener Axe parallel ist, die constante Normalkraft $2(\lambda+\mu)a$ in gehöriger Richtung anzubringen.

Der Gleichgewichtszustand, der durch die zweite Gruppe der oben aufgeführten Verschiebungen bestimmt ist, kann aus dem Potentiale $A \log r$ abgeleitet werden, dessen Gleichgewichtsflächen wiederum cylindrisch sind. Hier nehmen die Verschiebungen an Grösse zu mit abnehmendem Abstande von der Axe; eine cubische Dilatation findet nicht statt. Auf ein zur z-Axe senkrechtes Oberflächenelement findet weder ein Zug

noch ein Druck statt. Ein Element aber, das in einer der gedachten Gleichgewichtsflächen liegt und den Körper begrenzt, erleidet die Wirkung der in gehöriger Richtung anzubringenden Normalkraft:

$$N = -\frac{2\mu b}{r^2}.$$

Die letztbetrachtete Deformation kann nur bei einem Hohlcylinder, nicht bei einem Vollcylinder vorkommen, weil bei diesem die Verschiebungen in der Axe unendlich gross würden; für einen solchen ist also die Constante $b = 0$ zu setzen.

4. Wenn ein Körper um eine Axe so tordirt wird, dass die Theilchen einer auf der Axe senkrechten Ebene ihre gegenseitige Lage nicht ändern, sondern concentrische Kreisbogen mit demselben Centriwinkel ω beschreiben, welcher Winkel von der Lage der gedachten Ebene abhängig sei, so hat man, wenn die neutral bleibende Axe zur z-Axe genommen, die Entfernung von derselben durch r und ihre Winkel mit den Axen der x und y durch α und β bezeichnet werden:

$$\xi = r\cos(\alpha+\omega) - r\cos\alpha, \quad \eta = r\sin(\alpha+\omega) - r\sin\alpha, \quad \zeta = 0,$$

oder, wenn der Winkel ω sehr klein ist und nur die erste Potenz desselben berücksichtigt wird:

$$\xi = -\omega r\cos\beta = -\omega y, \quad \eta = \omega r\cos\alpha = \omega x, \quad \zeta = 0.$$

Diese letzteren Verschiebungen, deren Natur leicht zu erkennen ist, lassen sich mit den Elasticitätsgesetzen durch gehörige Bestimmung des Torsionswinkels ω in Einklang bringen. Substituirt man nämlich diese in die Elasticitätsgleichungen, so erweist sich die eine als befriedigt, und die beiden anderen fallen zusammen mit der Gleichung:

$$\frac{d^2\omega}{dz^2} = 0,$$

woraus folgt:

$$\omega = \sigma + \tau z.$$

Hiernach kann man setzen:

$$\xi = -\tau z r\cos\beta, \quad \eta = \tau z r\cos\alpha, \quad \zeta = 0.$$

Es tritt dann die xy-Ebene als neutrale Ebene auf, der Torsionswinkel ω wird der Entfernung von jener Ebene propor-

tional und der Sinn der Torsion ist auf den verschiedenen Seiten derselben Ebene verschieden. Eine Dilatation findet hier nicht statt.

Zur Bestimmung der Elasticitätskraft hat man:

$$N_x = N_y = N_z = 0, \quad T_x = \mu\tau x, \quad T_y = -\mu\tau y, \quad T_z = 0.$$

Für den besonders wichtigen Fall, wo der Körper durch einen Kreiscylinder begrenzt ist, dessen Axe die z-Axe ist, und dessen Grundflächen gleich weit von der xy-Ebene abstehen und letzterer parallel sind, ergibt sich aus Obigem Folgendes: Die Seitenflächen des Cylinders erleiden keinen Zug oder Druck; ein Element einer Grundfläche wird nur von einer Tangentialkraft sollicitirt, für deren Componenten sich ergibt:

$$X = -\mu\tau y, \qquad Y = \mu\tau x.$$

Alle diese Tangentialkräfte lassen sich durch ein Gegenpaar ersetzen, dessen Axe der z-Axe parallel ist, und für dessen Moment der Ausdruck $\frac{1}{2}\pi\mu\tau R^4$ berechnet wird, unter R den Radius des Cylinders verstanden. Bezeichnet man die Länge des Cylinders durch L und den Winkel, welchen zwei Radien der Grundflächen, die in dem natürlichen Zustande des Körpers mit einander parallel sind, nach der Deformation einschliessen, durch δ, so erhält man für das eben erwähnte Moment den Ausdruck:

$$\frac{\pi\mu\delta R^4}{2L}.$$

Es gilt dieser Ausdruck auch für einen Cylinder, von dessen Grundflächen die eine befestigt ist, und die hier betrachtete Deformation gehört zu den rotatorischen. Setzt man nämlich:

$$\psi = az^2,$$

und bildet nach der früher angegebenen Methode für den Raum eines unendlichen Cylinders, dessen Axe in die z-Axe fällt, die rotatorischen Verschiebungen, so erhält man Ausdrücke von der oben angewandten Form. Die Verschiebungen können angesehen werden als die electromagnetischen Wirkungen von Strömen, die den Cylinder parallel der Axe durchlaufen und deren Intensität mit z proportional ist.

5. Durch die Annahmen:

$$\xi = -yf(r), \quad \eta = xf(r), \quad \zeta = 0,$$

wo r die Entfernung von der z-Axe bedeuten soll, erhält man eine Deformation, wobei alle Theilchen, die auf einem Cylinder liegen, dessen Axe in die z-Axe fällt, ihre gegenseitige Lage nicht ändern, sowie auch keine gemeinsame Verschiebung in der Richtung der letzterwähnten Axe erleiden. Die verschiedenen Cylinder, welche sich um die z-Axe legen lassen, werden aber um diese und gegen einander gedreht. Die cubische Dilatation verschwindet, und die Substitution der für die Verschiebungen angenommenen Ausdrücke in die Elasticitätsgleichungen liefert zur Bestimmung von f nach leichter Rechnung folgende Differentialgleichung:

$$\frac{3}{r} \cdot \frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2} = 0.$$

Durch Multiplication mit r^3 wird diese Gleichung:

$$3r^2 \frac{df}{dr} + r^3 \frac{d^2f}{dr^2} = 0,$$

oder:

$$\frac{d\left(r^3 \frac{df}{dr}\right)}{dr} = 0.$$

Daraus findet man sogleich:

$$f = \frac{a}{r^2} + b,$$

wo a und b willkürliche Constanten sind, und hiernach ist, da es nur auf relative Verschiebungen ankommt, zu setzen:

$$\xi = -\frac{ay}{r^2}, \quad \eta = \frac{ax}{r^2}, \quad \zeta = 0.$$

Es ergibt sich dann ferner für die entwickelte Elasticitätskraft:

$$N_x = 4a\mu \frac{xy}{r^4}, \quad N_y = -4a\mu \frac{xy}{r^4}, \quad N_z = 0,$$

$$T_x = T_y = 0, \quad T_z = -2a\mu \frac{x^2 - y^2}{r^4}.$$

Der Körper sei ein kreisförmiger Hohlcylinder, dessen Axe in die z-Axe fällt. Im Falle des Gleichgewichtes erleiden die

Grundflächen weder Druck noch Zug. Das Element der Seitenfläche erleidet keinen Normaldruck, sondern nur einen zur z-Axe senkrechten tangentialen Zug, dessen Richtung mit der Richtung der Verschiebung des Elementes zusammenfällt. Für die Grösse dieser Tangentialkraft ergibt sich aus Obigem der Werth:

$$T = \frac{2\mu a}{R^2},$$

wenn R der Radius der betreffenden Seitenfläche ist. Hiernach berechnet sich das Moment des Gegenpaares, zu dem sich jene an einer Seitenfläche angreifenden Tangentialkräfte vereinigen lassen, wenn L die Länge des Cylinders ist, zu

$$\frac{4\mu\pi a L}{R}.$$

Die hier betrachtete Deformation kann bei einem Vollcylinder nicht vorkommen, weil die Verschiebungen in der Axe unendlich werden würden. Sie gehört zu der Art der rotatorischen, aber zu derjenigen besonderen Klasse der letzteren, deren Verschiebungs-Componenten sich als partielle Differentialquotienten eines Potentials nach den Coordinaten darstellen lassen; dies Potential ist hier die Function $a\, arctang \frac{y}{x}$. Die Verschiebungen lassen sich ansehen als die electromagnetischen Wirkungen eines constanten, unbegrenzten und in der z-Axe befindlichen electrischen Stromes.

6. Man erhält strahlige, nach demselben Punkte hin convergirende Verschiebungen, wenn man setzt:

$$\xi = f(r)\cos\alpha = \frac{x}{r}f(r), \quad \eta = f(r)\cos\beta = \frac{y}{r}f(r),$$

$$\zeta = f(r)\cos\gamma = \frac{z}{r}f(r),$$

unter r die Entfernung vom Coordinatenanfangspunkte und unter α, β, γ die Winkel verstanden, die der Radiusvector r mit den Axen bildet. Alle Theilchen, die im natürlichen Zustande auf einer Kugelfläche liegen, deren Mittelpunkt der Coordinatenanfangspunkt ist, befinden sich auch nach der Verschiebung auf einer solchen, deren Radius um $f(r)$ denjenigen

der ursprünglichen übertrifft. Die neue Oberfläche ist mit der ursprünglichen ähnlich und ähnlich gelegen, und zwar ist der Anfangspunkt ihr Aehnlichkeitspunkt. Wie die Substitution obiger Ausdrücke für die Verschiebungen in die Elasticitätsgleichungen ergibt, muss die Function f, damit die angenommenen Verschiebungen mit den Elasticitätsgesetzen im Einklange stehen, der folgenden Differentialgleichung genügen:

$$\frac{d\left(\frac{2}{r}f+\frac{df}{dr}\right)}{dr}=0.$$

Man findet diese Gleichung durch eine Rechnung, welche der in 3) ausgeführten ganz analog ist. Aus derselben folgt:

$$\frac{2}{r}f+\frac{df}{dr}=Const.$$

Die cubische Dilatation, welche hier durch den auf der linken Seite stehenden Ausdruck dargestellt wird, ist also constant.

Aus der letzten Gleichung findet man durch Multiplication mit r^2:

$$\frac{d(r^2f)}{dr}=r^2\,.\,Const.,$$

woraus sich durch nochmalige Integration ergibt:

$$f=ar+\frac{b}{r^2},$$

wo a und b wieder zwei willkürliche Constanten sind.

Die hierdurch gefundene Deformation lässt sich als Uebereinanderlagerung zweier Zustände betrachten, die durch die zwei folgenden Complexe von Verschiebungen bestimmt sind:

$$\xi_1=ax,\quad \eta_1=ay,\quad \zeta_1=az,$$
$$\xi_2=\frac{bx}{r^3},\quad \eta_2=\frac{by}{r^3},\quad \zeta_2=\frac{bz}{r^3}.$$

Jede dieser Deformationen weist für sich die allgemeinen, oben angegebenen Eigenschaften des aus ihnen resultirenden Zustandes auf. Ausserdem aber characterisiren sie sich, wie folgt.

Die erste Deformation ist von der constanten cubischen Dilatation $3a$ begleitet und kann nach der früher angegebenen Methode aus der Potentialfunction Ar^2 mit sphärischen Ni-

veauflächen abgeleitet werden. Für die bei derselben entwickelten Elasticitätskräfte hat man:

$$N_x = N_y = N_z = (3\lambda + 2\mu)\,a, \qquad T_x = T_y = T_z = 0,$$

so dass also die an der Oberfläche wirkende Kraft, wie auch jene gestaltet sein mag, stets eine Normalkraft von der constanten Grösse $(3\lambda + 2\mu)\,a$ ist.

Die zweite Deformation lässt sich aus dem Kugelpotentiale $\frac{B}{r}$ herleiten. Sie bedingt keine Dilatation und für die entwickelten Elasticitätskräfte hat man:

$$N_x = 2\mu b\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x^2}{r^5}\right), \quad T_x = -6\mu b\,\frac{yz}{r^5},$$

$$N_y = 2\mu b\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3y^2}{r^5}\right), \quad T_y = -6\mu b\,\frac{xz}{r^5},$$

$$N_z = 2\mu b\left(\frac{1}{r^3} - \frac{3z^2}{r^5}\right), \quad T_z = -6\mu b\,\frac{xy}{r^5}.$$

Wenn der Körper durch eine Kugelfläche, deren Mittelpunkt in den Coordinatenanfangspunkt fällt, begrenzt ist, so erleidet dieselbe allenthalben den Normaldruck:

$$N = -\frac{4\mu b}{r^3}.$$

Weil die Ausdrücke für die Verschiebungen im Mittelpunkte unendlich werden, so kann diese Deformation nur bei einer Hohlkugel vorkommen.

7. Die Annahme:

$$\xi = -yf(r), \qquad \eta = xf(r), \qquad \zeta = 0,$$

wo r die Entfernung vom Coordinatenanfangspunkte bedeutet, stellt eine Deformation dar, wobei die Theilchen einer um jenen Punkt beschriebenen Kugelfläche letztere nicht verlassen und ihre gegenseitige Lage nicht ändern, indem jene Fläche bloss um die z-Axe gedreht wird. Zur Bestimmung der Function f findet man durch Substitution in die Elasticitätsgleichungen:

$$\frac{4}{r}\cdot\frac{df}{dr} + \frac{d^2f}{dr^2} = 0.$$

Durch Multiplication mit r^4 wird diese Gleichung:

$$4r^3\frac{df}{dr}+r^4\frac{d^2f}{dr^2}=0,$$

oder:

$$\frac{d\left(r^4\frac{df}{dr}\right)}{dr}=0.$$

Daraus erhält man sogleich:

$$f=\frac{a}{r^3}+b,$$

wo a und b die willkürlichen Constanten sind. Setzen wir demzufolge:

$$\xi=-\frac{ay}{r^3},\quad \eta=\frac{ax}{r^3},\quad \zeta=0,$$

so findet man für die Dilatation den Werth Null, sowie ferner:

$$N_x=6a\mu\frac{xy}{r^5},\qquad N_y=-6a\mu\frac{xy}{r^5},\qquad N_z=0,$$

$$T_x=-3a\mu\frac{xz}{r^5},\quad T_y=3a\mu\frac{yz}{r^5},\quad T_z=-3a\mu\frac{x^2-y^2}{r^5}.$$

Für den Fall, dass der Körper von einer Kugelfläche begrenzt wird, deren Mittelpunkt im Coordinatenanfangspunkte liegt und deren Radius R ist, erleidet ein Element der Oberfläche nur einen tangentialen Zug. Dieser ist mit dem Aequator der Kugel parallel, und wenn φ die Breite des Elementes ist, so findet sich für denselben:

$$T=\frac{3a\mu\cos\varphi}{R^3}.$$

Die betrachtete Verschiebung, die von keiner Dilatation begleitet ist und zu den rotatorischen gehört, ist gleich und gleich gerichtet mit der electromagnetischen Kraft, welche ein im Anfangspunkte befindliches und in die z-Axe fallendes Stromelement auf einen Magnetpol ausübt.

Die vorhergehenden Betrachtungen finden ihre Anwendung und zugleich ihre Bestätigung in den Versuchen, welche man angestellt hat, um die Grössen λ und μ zu bestimmen. Diese Versuche bestehen theils darin, dass man die cubische Contraction beobachtet, die in einem homogenen Körper durch

einen constant auf die Oberfläche desselben wirkenden Druck erzeugt wird, ferner in der Bestimmung der Verlängerung, welche ein prismatischer Stab darbietet, wenn er von einer in der Richtung seiner Axe wirkenden Kraft gezogen wird, endlich in der Beobachtung der Abhängigkeit zwischen der Länge und Dicke eines elastischen Fadens und der Dauer der Schwingungen, in die ein Körper, welcher an jenem aufgehängt und dessen Trägheitsmoment bekannt ist, in Folge der elastischen Wirkung des Fadens geräth.

II.

Experimentelle Prüfung der Theorie des Elasticitätsgleichgewichtes.

1. Dehnung eines prismatischen Stabes.

Ein Körper von prismatischer Form, dessen eine Grundfläche befestigt ist, während an der anderen Grundfläche ein gleichmässig vertheilter Zug in der Richtung der Kanten wirkt, dehnt sich in der Richtung der Länge aus, während er sich zugleich nach den Querrichtungen zusammenzieht. Annähernd wird sich die Deformation darstellen lassen durch die Annahmen:

$$\xi = -ax, \quad \eta = -ay, \quad \zeta = cz,$$

wenn die z-Axe in die Richtung der Kanten gelegt wird, denn es lassen sich a und c in ein solches Verhältniss zu einander stellen, dass die Seitenflächen keinen, die Grundflächen aber einen constanten Normalzug erleiden. Nach dem Früheren ergibt sich nämlich, dass eine Seitenfläche nur einen Normalzug erleidet, dessen Grösse

$$\lambda c - 2(\lambda+\mu)a$$

ist. Damit nun diese Kraft verschwinde, ist zu setzen:

$$\frac{c}{a} = 2\left(1+\frac{\mu}{\lambda}\right).$$

Für den auf die Grundfläche wirkenden Normalzug hat man allgemein:

$$N = (\lambda+2\mu)c - 2\lambda a,$$

woraus für den in Rede stehenden Fall, wo der Seitendruck verschwindet, folgt:

$$\frac{N}{c} = \frac{3\lambda + 2\mu}{1 + \frac{\lambda}{\mu}}.$$

Endlich ergibt sich noch zur Bestimmung der cubischen Dilatation:

$$\frac{N}{\theta} = 3\lambda + 2\mu.$$

Der Quotient $\frac{N}{c} = q$ wird Elasticitätscoefficient genannt; er wird bestimmt, indem die lineare Verlängerung c beobachtet wird, welche sich einer gegebenen Zugkraft N zuordnet.

Die zahlreichen zur Bestimmung des Elasticitätscoefficienten unternommenen Versuche bestätigen, dass die Grösse q innerhalb gewisser Grenzen bei demselben Körper constant ist. Es mögen hier einige Ergebnisse der Versuche Wertheim's *(Recherches sur l'elasticité; Annales de Chimie et de Physique, 3me série, tome XII)* über die Elasticität der Metalle aufgeführt werden. Die Bestimmungen wurden bei einer Temperatur von 15—20° C. gemacht, die untersuchten Körper waren zu Drähten gezogen (Zink ausgenommen) und hierauf wieder erwärmt worden. Die Verlängerung wurde mittelst eines Kathetometers gemessen. Als Einheit der Fläche ist das Quadratcentimeter genommen und als Einheit der Kraft eine Million Gramme, so dass also z. B. beim Blei die Grösse $\frac{N}{c}$ für ein Quadratcentimeter 173 Millionen Gramme beträgt.

Metall:		Dichtigkeit:	Elasticitäts-coefficient:
Blei	100°	11,232	173
Gold	*	18,035	558
Silber	*	10,304	715
Zink		7,146	902
Palladium	*	11,225	979
Kupfer	*	8,936	1052
Platin	*	21,083	1552
Eisen	*	7,757	2079
Gussstahl	*	7,819	1956
Messing aus 67,6 Cu., 32,4 Zn.		8,427	928

Blei bis 100°, die mit * bezeichneten bis zur Dunkel-Rothglühhitze erwärmt.

Die folgende Tabelle enthält die Hauptdaten zweier Versuche, die an einem Eisendrahte von etwas mehr als 1^m Länge und $1^{mm}5037$ Radius angestellt wurden. Die erste Columne enthält die in Centimetern ausgedrückte Entfernung zweier Marken, welche an dem Drahte angebracht waren, bei einer Belastung, die zur Streckung des Drahtes hinreichte; die zweite Columne gibt die zu jenem Gewichte hinzugefügte Belastung für 1 Quadratcentimeter an; die bei dieser Vermehrung der Belastung eintretende Entfernung der Marken steht in der dritten Columne; endlich enthält die letzte Columne den aus den drei vorhergehenden Daten sich ergebenden Elasticitätscoefficienten $q = \frac{N}{c} = \frac{L}{L' - L} N$, in der obigen Einheit ausgedrückt.

L	N	L'	q
78,434	2000000	78,505	2209
81,342	3730000	81,515	1754

Wertheim* hat auch den Quotienten $\frac{N}{\theta}$ direct zu bestimmen versucht, indem er cylindrische Röhren aus Messing und Glas durch Belastung dehnte und die Aenderungen des inneren Volumens bestimmte. Es ergab sich, dass derselbe nahe das Dreifache des Quotienten $\frac{N}{c}$ betrug, wonach für jene Substanzen $\lambda = 2\mu$ zu setzen wäre. Früher hatte Cagniard-Latour durch ein Verfahren, welches manche Einwürfe zulässt, für das Verhältniss jener Quotienten bei einem Messingdrahte $\frac{1}{2}$ gefunden, worin man eine Bestätigung der Annahme $\lambda = \mu$ erblickt hatte.

Aus Versuchen von Kirchhoff an drei Stahlstäben und einem Messingstabe (über das Verhältniss der Quercontraction zur Längendilatation bei Stäben von federhartem Stahl; Pogg. Annalen Bd. CVIII) geht indess hervor, dass das Verhältniss $\lambda : \mu$ nicht für alle Substanzen ein und dasselbe, sondern für jede Substanz vielmehr ein individuelles ist.

---

* *Mémoire sur l'équilibre des corps solides. Annales de Chimie et de Physique, 3me série, tome XXIII.*

2. Compression einer Hohlkugel.

Wenn die ganze Oberfläche eines Körpers einem constanten Drucke ausgesetzt wird, so werden seine Theilchen strahlig nach einem Centrum hin verschoben, so dass man, welches auch die Gestalt des Körpers sein mag, zu setzen hat:

$$\xi = -ax, \quad \eta = -ay, \quad \zeta = -az.$$

Dem Früheren zufolge hat man für den Oberflächendruck:

$$N = -(3\lambda + 2\mu)\, a,$$

und für die cubische Dilatation:

$$\theta = -3a.$$

Obiges gilt auch dann noch, wenn sich in dem Körper eine Höhlung befindet, wofern nur letztere denselben Druck wie die äussere Oberfläche erleidet. Andere Verhältnisse aber treten ein, wenn die Oberfläche der Höhlung zwar auch einen constanten, aber von dem äusseren verschiedenen Druck erleidet. Der Zustand des Gleichgewichtes ist alsdann wesentlich von der Gestalt der beiden Oberflächen abhängig. Es möge hier der Fall betrachtet werden, wo der comprimirte Körper eine Hohlkugel ist und die Oberfläche der Höhlung keinen Druck erleidet. Die Deformation lässt sich alsdann darstellen durch die Verschiebungen:

$$\xi = f(r)\cos\alpha, \quad \eta = f(r)\cos\beta, \quad \zeta = f(r)\cos\gamma,$$

wo zu setzen ist:

$$f(r) = -ar - \frac{b}{r^2},$$

unter a und b zwei Constanten verstanden. Für den Druck auf die Oberfläche hat man nun dem Früheren zufolge den Ausdruck:

$$-(3\lambda + 2\mu)\, a + \frac{4\mu b}{r^3}.$$

Wenn wir daher den Radius der Kugel durch r, den absolut genommenen Druck auf ihre Oberfläche durch N und den Radius ihrer Höhlung durch r_0 bezeichnen, so muss sein:

$$(3\lambda + 2\mu)\, a - \frac{4\mu b}{r_0^3} = 0,$$

$$(3\lambda + 2\mu)\, a - \frac{4\mu b}{r^3} = N.$$

Hieraus folgt:

$$a = \frac{N}{r_0^3 (3\lambda + 2\mu)\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3}\right)}, \qquad b = \frac{N}{4\mu\left(\frac{1}{r_0^3} - \frac{1}{r^3}\right)},$$

und für diese Werthe wird die cubische Dilatation:

$$\theta = -\frac{3N}{(3\lambda + 2\mu)\left(1 - \frac{r_0^3}{r^3}\right)}.$$

Nun ergibt sich ferner für die Verkürzung des inneren Radius der Werth:

$$a r_0 + \frac{b}{r_0^2} = \frac{3 r_0 (\lambda + 2\mu) a}{4\mu},$$

woraus man für den Quotienten aus der Aenderung des Volumens der Höhlung und dem ursprünglichen Volumen derselben, oder für die cubische Contraction der Höhlung, findet:

$$C = \frac{9(\lambda + 2\mu)}{4\mu(3\lambda + 2\mu)} \cdot \frac{r^3}{r^3 - r_0^3} N.$$

Man hat hiernach:

$$\frac{3\lambda + 2\mu}{2 + \frac{\lambda}{\mu}} = \frac{9N}{4C} \cdot \frac{r^3}{r^3 - r_0^3}.$$

Auf zwei der Versuchsreihen, welche Regnault über die Compressibilität des Wassers angestellt hat *(De la compressibilité des liquides; Mémoires de l'institut de France, tome XXI)* lässt sich die obige Formel anwenden, da die gebrauchten Piezometer von sphärischer Form waren. Wenn man die Resultate der Beobachtungen in der Weise verbindet, wie es Wertheim thut *(Mémoire sur l'équilibre des corps solides homogènes; Annales de Chimie et de Physique, 3me série, tome XXIII)*, ergibt sich für die Grösse $\frac{3\lambda + 2\mu}{2 + \frac{\lambda}{\mu}}$ bei Kupfer der Werth 770 und bei Messing 697 Millionen Gramm, das Centimeter als Einheit genommen. Hieraus berechnet man unter der Annahme $\lambda = \mu$ den Elasticitätscoefficienten des Kupfers gleich 1155 und den des Messings 1045.

Die kupferne Hohlkugel, mit welcher Regnault experimentirte, hatte einen äusseren Radius von ungefähr 3 Centi-

metern und war ungefähr $0{,}^{cm}08$ dick. Das Volumen ihrer Höhlung betrug 109,11, das ihrer Wand 8,38 Cubikcentimeter. Hiernach ist:

$$\frac{r^3}{r^3 - r_0^3} = \frac{117{,}49}{8{,}38} = 14{,}02.$$

Als die äussere Oberfläche einem Drucke ausgesetzt wurde, dessen Ueberschuss über den Atmosphärendruck 432,64 Centimeter Quecksilber betrug, stieg das Wasser in der an der Kugel befindlichen offenen Steigröhre um 33,7 Theilstriche. Nun war das Gewicht eines Quecksilberfadens von der Länge eines Theilstriches gleich 0,010271 Gr. gefunden worden. Es war also die dem angewandten Drucke $N = 5883{,}9$ entsprechende cubische Compression der Höhlung:

$$C = \frac{0{,}010271 \cdot 33{,}7}{13{,}6 \cdot 109{,}11} = 0{,}00023326,$$

so dass man endlich findet:

$$\frac{3\lambda + 2\mu}{2 + \frac{\lambda}{\mu}} = 795{,}7 \text{ Millionen Gramm.}$$

Hieraus ergibt sich für den Elasticitätscoefficienten $\frac{3\lambda + 2\mu}{1 + \frac{\lambda}{\mu}}$ unter der Annahme $\lambda = \mu$ der Werth 1163,5; unter der Annahme $\lambda = 2\mu$ dagegen findet sich 1060,9, welche letztere Zahl mit der aus den Verlängerungsversuchen gefundenen sehr gut übereinstimmt.

3. Torsion eines prismatischen Stabes.

Indem man einen Metalldraht von kreisförmigem Querschnitte an dem einen Ende in regelmässiger Weise festklemmt und ebenso an dem anderen Ende mit einer Belastung versieht, die zur Streckung des Drahtes hinreicht, erhält man eine Art von Torsionswage, welche, wenn das angehängte Gewicht aus seiner Gleichgewichtslage herausgebracht wird, durch die Elasticität des Drahtes in Torsionsschwingungen geräth. Wofern die Masse des Drahtes gegen die des Gewichtes nur klein ist, kann von ersterer ganz abgesehen und bloss die Be-

wegung bestimmt werden, welche das Belastungsgewicht in Folge der vom Drahte entwickelten Elasticitätskraft ausführt. Und wenn überdies die Amplituden nur klein sind, so kann als Ausdruck für die Beschleunigung das früher gefundene Moment des Gegenpaares genommen werden, welches von einem Cylinder entwickelt wird, der an der einen Basis befestigt ist und welcher um seine Axe ein Weniges tordirt wird. Bezeichnen wir also mit δ den Ausschlag des Gewichtes, d. i. den Winkel, den eine Verticalebene desselben zur Zeit t mit der Gleichgewichtslage bildet, hierbei die Zeit vom letzten Durchgange durch die Gleichgewichtslage an gerechnet, so ist nach dem Früheren das Moment des beschleunigenden Gegenpaares:

$$-\frac{\pi\mu R^4}{2L}\delta,$$

wobei R den Halbmesser und L die Länge des Drahtes bezeichnet. Andererseits findet man aus der Bewegung selbst als Ausdruck für das Gegenpaar, welches sich aus den Beschleunigungen aller einzelnen Theilchen des Gewichtes zusammensetzt, bekanntlich:

$$J\frac{d^2\delta}{dt^2},$$

wenn J das Trägheitsmoment des Gewichtes in Bezug auf die Axe des Drahtes ist. Nach dem d'Alembert'schen Princip hat man also:

$$\frac{d^2\delta}{dt^2}=-\frac{\pi\mu R^4}{2JL}\delta,$$

woraus sich durch Integration ergibt:

$$t=\sqrt{\frac{2JL}{\pi\mu R^4}}\,arc\,sin\frac{\delta}{\delta_0},$$

wenn δ_0 den Werth von δ, bei welchem zum ersten Male die Winkelgeschwindigkeit verschwindet, d. h. also die Amplitude bedeutet. Man findet hiernach für die Dauer D einer ganzen Oscillation die Beziehung:

$$D^2=\frac{8\pi JL}{\mu R^4}.$$

Die Einheit der Länge ist, wie gewöhnlich, das Centimeter, die Einheit der Kraft das Gramm und die Masse wird

dargestellt durch das Gewicht, dividirt durch die Beschleunigung der Schwere g. Durch Beobachtung der Grössen D, J, L und R ergibt sich also ein Schluss auf die Constante μ. Kupffer* hat letztere mittelst obiger Methode bei mehreren Metallen bestimmt. Aus seinen Versuchen ergeben sich bei der Annahme $\lambda = \mu$ die folgenden Werthe für den Elasticitätscoefficienten:

Metall:	Elasticitäts-coefficient:	Metall:	Elasticitäts-coefficient:
Eisen No. 1	1857	Platin . .	1592
„ No. 2	1785	Silber . .	708
Messing . .	945	Gold . . .	679

Wir wollen hier das Schema eines der von Kupffer angestellten Versuche folgen lassen. Der untersuchte Draht aus Platin hatte eine Länge von 323,40^{cm} und einen Radius von 0,24397^{cm}. Der Hebel, welcher an dem freien Ende des Drahtes hing und durch sein Gewicht den letzteren streckte, wurde auf jeder Seite mit 74193 Gramm belastet. Die Belastung wurde bei einem ersten Versuche in der Entfernung 55,953^{cm} aufgehängt, bei einem zweiten Versuche in der Entfernung 25,433^{cm}. In dem ersten Versuche ergab sich für die auf $13\frac{1}{2}^0$ R., auf verschwindende Amplituden und auf den luftleeren Raum reducirte Dauer einer ganzen Oscillation 45,3333 Sec., im zweiten Versuche war die Dauer 26,4858 Sec. Es werde die Belastung auf einer Seite des Hebels durch p, ihre Entfernung von der Axe des Drahtes durch e bezeichnet; ferner sei i das Trägheitsmoment des Hebels, vermehrt um das doppelte Trägheitsmoment der auf einer Seite befindlichen Belastung in Bezug auf eine verticale, durch den Schwerpunkt des Gewichtes gehende Axe. Dann ist bekanntlich $J = i + \frac{2p}{g} e^2$, wo g gleich 980,88^{cm} ist, und man hat sonach für die Oscillationsdauer:

---

* *Bulletin de l'académie de St. Petersbourg, tome VII: Recherches expérimentales relatives à l'élasticité des métaux.*

$$D^2 = \frac{8\pi L}{\mu g R^4}(gi + 2pe^2).$$

Indem man in diese Gleichung die auf den einen und anderen Versuch bezüglichen Grössen, die durch die Marken 1 und 2 bezeichnet werden mögen, einsetzt, findet man nach Elimination von gi:

$$\mu = \frac{16\,\pi\, Lp\,(e_1^2 - e_2^2)}{g R^4 (D_1^2 - D_2^2)},$$

wonach sich bei der Annahme $\lambda = \mu$ oder $\mu = \frac{2}{5}q$ der Elasticitätscoefficient des Platins zu 1592 Millionen Gramm berechnet.

Aeltere hierher gehörige Torsionsversuche von Coulomb, Duleau, Savart etc. findet man bei Wertheim: *Note sur la torsion des verges homogènes; Annales de Chimie et de Physique, 3me série, tome XXV.*

Die früher gefundene und soeben beim Cylinder angewandte Torsions-Deformation kann bei einem prismatischen Stabe von nicht kreisförmigem Querschnitte keine Anwendung finden, wenn er keine seitliche Kraft erleidet, da bei derselben auf den Seitenflächen Tangentialkräfte auftreten würden. Setzen wir aber, um auch für andere, als kreisförmige Querschnitte über die Torsionsverhältnisse Aufschluss zu erhalten, im Hinblick auf das Frühere:

$$\xi = -\tau yz, \quad \eta = \tau xz, \quad \zeta = \tau xy + f(x, y),$$

so muss, damit diese Deformation möglich sein soll, wie die Substitution in die Elasticitätsgleichungen ergibt, die Function f der Bedingung $\Delta^2 f = 0$ genügen. Dann ergibt sich für die Elasticitätskraft, die auf einer der z-Axe parallelen Fläche entwickelt wird:

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = T_y \cos\alpha + T_x \cos\beta,$$

wo sich

$$T_x = \mu\left(2\tau x + \frac{df}{dy}\right), \quad T_y = \mu\frac{df}{dx}$$

findet. Für einen prismatischen Körper, dessen Axe in die z-Axe fällt, erhalten wir hiernach eine mögliche Torsions-Deformation, wenn wir die Function f so bestimmen, dass $\Delta^2 f$ verschwindet und zugleich auf den Seitenflächen die Kraft Z den Werth Null erlangt.

Betrachten wir zunächst einen Cylinder mit elliptischer Basis. Die in die x-Axe fallende Halbaxe des Querschnittes sei a, die in die y-Axe fallende b. Da man hier

$$\cos\alpha : \cos\beta = \frac{x}{a^2} : \frac{y}{b^2}$$

hat, so ergibt sich zur Bestimmung von f:

$$\frac{df}{dx}\cdot\frac{x}{a^2}+\frac{df}{dy}\cdot\frac{y}{b^2}+\frac{2\tau xy}{b^2}=0.$$

Dieser Gleichung sowohl, als auch der Gleichung $\Delta^2 f=0$, wird genügt durch die Annahme:

$$f=-\frac{2a^2\tau}{a^2+b^2}xy.$$

Hierdurch ist die Torsions-Deformation vollständig bestimmt; für die Componenten der an einem Elemente der Grundfläche des Cylinders wirkenden Kraft erhält man:

$$X=T_y=-\frac{2\mu\tau a^2}{a^2+b^2}y,$$

$$Y=T_x=\mu\left(2\tau x-\frac{2\tau a^2}{a^2+b^2}x\right)=\frac{2\mu\tau b^2}{a^2+b^2}x.$$

Für das Moment dieser Kraft hat man demnach:

$$Yx-Xy=\frac{2\mu\tau}{a^2+b^2}(b^2x^2+a^2y^2).$$

Für das Torsionsmoment G, d. h. für das Gegenpaar, in das sich die an einer senkrechten Endfläche thätigen Tangentialkräfte, die allein auftreten, vereinigen lassen, hat man also, indem man den vorhergehenden Ausdruck über die ganze Fläche der Ellipse integrirt:

$$G=\frac{2\mu\tau}{a^2+b^2}\left\{b^2\int_{-a}^{+a}x^2\,dx\int_{-\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{+\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}dy+a^2\int_{-b}^{+b}y^2\,dy\int_{-\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}^{\frac{a}{b}\sqrt{b^2-y^2}}dx\right\}.$$

Führt man die angedeuteten Rechnungen aus, so ergibt sich endlich:

$$G=\mu\tau\pi\frac{a^3b^3}{a^2+b^2}.$$

Setzt man $a=b$, so findet man wieder den oben für den Kreiscylinder aufgestellten Ausdruck.

Hat man ferner einen Stab mit rechteckigem Querschnitte, dessen Seitenflächen

$$x = \pm \frac{a}{2}, \quad y = \pm \frac{b}{2}$$

sind, so ist nach dem Obigen die Function f so zu bestimmen, dass im Innern des Körpers

1) $$\Delta^2 f = 0$$

wird, sowie dass für $x = \pm \frac{a}{2}$

2) $$\frac{df}{dx} = 0$$

und endlich, dass für $y = \pm \frac{b}{2}$

3) $$\frac{df}{dy} = -2\tau x$$

wird. Durch Substitution der Function $e^{px} e^{qy}$ in die Gleichung 1) findet man, dass ein Integral der letzteren die Function $e^{my} \sin mx$, sowie $e^{-my} \sin mx$ ist, und dass sie also auch befriedigt wird durch eine nach den Sinus der Vielfachen von mx fortschreitende Reihe von der Form:

$$\Sigma (p e^{my} + q e^{-my}) \sin mx,$$

oder, da es sich um Darstellung einer Function zwischen den Grenzen $+\frac{a}{2}$ und $-\frac{a}{2}$ handelt:

$$\Sigma \left(p e^{m' \frac{2\pi}{a} y} + q e^{-m' \frac{2\pi}{a} y}\right) \sin m' \frac{2\pi}{a} x.$$

Der Differentialquotient dieser Reihe nach x verschwindet für $x = \pm \frac{a}{2}$, wenn wir für m' die ungeraden Vielfachen von $\frac{1}{2}$ nehmen, wodurch also der zweiten Gleichung genügt wird. Damit endlich der Gleichung 3) Genüge geschehe, muss für $y = \pm \frac{b}{2}$ sein:

$$-2\tau x = \frac{\pi}{a} \left(p_1 e^{\frac{\pi}{a} y} - q_1 e^{-\frac{\pi}{a} y}\right) \sin \frac{\pi}{a} x$$
$$+ \frac{3\pi}{a} \left(p_3 e^{\frac{3\pi}{a} y} - q_3 e^{-\frac{3\pi}{a} y}\right) \sin \frac{3\pi}{a} x + \ldots\ldots$$

Nun ist aber, wie sich aus den Reihen ergibt, die zur Entwickelung einer beliebigen Function von x nach den Sinus und Cosinus der Vielfachen von x dienen:

$$x = \frac{4}{\pi}\left\{\frac{\sin x}{1^2} - \frac{\sin 3x}{3^2} + \frac{\sin 5x}{5^2} - \ldots\ldots\right\},$$

so dass für den Coefficienten des Gliedes mit $\sin\frac{(2i+1)\pi}{a}x$ zu setzen ist:

$$p_{2i+1}\, e^{\pm\frac{(2i+1)\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}} - q_{2i+1}\, e^{\mp\frac{(2i+1)\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}} = -\frac{8a^2\tau}{\pi^3}\cdot\frac{(-1)^i}{(2i+1)^3}.$$

Auch dieser Gleichung wird genügt, wenn man endlich setzt:

$$f = -\frac{8a^2\tau}{\pi^3}\sum_0^\infty \frac{(-1)^i}{(2i+1)^3}\cdot\frac{e^{\frac{(2i+1)\pi}{a}y} - e^{-\frac{(2i+1)\pi}{a}y}}{e^{\frac{(2i+1)\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}} + e^{-\frac{(2i+1)\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}}}\sin\frac{(2i+1)\pi}{a}x.$$

Die Elasticitätskräfte, welche an einem senkrechten Querschnitte thätig sind und tangential wirken, lassen sich in ein Gegenpaar vereinigen, und für das Moment des letzteren hat man wieder:

$$G = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} dx \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} (Yx - Xy)\, dy,$$

und es ist:

$$X = T_y = \mu\frac{df}{dx}, \qquad Y = T_x = \mu\left(\frac{df}{dy} + 2\tau x\right).$$

Zunächst findet man:

$$G = \mu\tau\left\{\frac{a^3 b}{6} + J_1 - J_2\right\},$$

wo gesetzt ist:

$$J_1 = \frac{16a^2}{\pi^3}\cdot$$

$$\int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} y \sum_0^\infty \frac{1}{(2i+1)^3}\cdot\frac{e^{\frac{(2i+1)\pi}{a}y} - e^{-\frac{(2i+1)\pi}{a}y}}{e^{\frac{(2i+1)\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}} + e^{-\frac{(2i+1)\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}}}\, dy,$$

$$J_2 = \frac{16a^2}{\pi^3}\cdot$$

$$\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} x \sum_0^\infty \frac{(-1)^i}{(2i+1)^3}\cdot\frac{e^{\frac{(2i+1)\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}} - e^{-\frac{(2i+1)\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}}}{e^{\frac{(2i+1)\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}} + e^{-\frac{(2i+1)\pi}{a}\cdot\frac{b}{2}}}\sin\frac{(2i+1)\pi}{a}x\, dx.$$

Durch Anwendung der Formeln:

$$\int y e^{my}\,dy = \frac{1}{m}\,y e^{my} - \frac{1}{m^2}\,e^{my},$$

$$\int x \sin mx\,dx = -\frac{1}{m}\,x\cos mx + \frac{1}{m^2}\sin mx$$

erhält man:

$$J_1 = \frac{16\,a^3 b}{\pi^4}\sum_0^\infty \frac{1}{(2i+1)^4} - \frac{32\,a^4}{\pi^5}\sum_0^\infty \frac{1}{(2i+1)^5}\cdot\frac{1-e^{-(2i+1)\pi\frac{b}{a}}}{1+e^{-(2i+1)\pi\frac{b}{a}}},$$

$$J_2 = \frac{32\,a^4}{\pi^5}\sum_0^\infty \frac{1}{(2i+1)^5}\cdot\frac{1-e^{-(2i+1)\pi\frac{b}{a}}}{1+e^{-(2i+1)\pi\frac{b}{a}}}.$$

Da aber bekanntlich

$$\sum_0^\infty \frac{1}{(2i+1)^4} = \tfrac{1}{6}\left(\frac{\pi}{2}\right)^4$$

ist, so kommt durch Substitution:

$$G = \mu\tau\left\{\frac{a^3 b}{3} - \frac{64\,a^4}{\pi^5}\sum_0^\infty \frac{1}{(2i+1)^5}\cdot\frac{1-e^{-(2i+1)\pi\frac{b}{a}}}{1+e^{-(2i+1)\pi\frac{b}{a}}}\right\}.$$

Für ein Prisma mit quadratischem Querschnitte findet man hieraus insbesondere:

$$G = \mu\tau\,a^4\left\{\tfrac{1}{3} - \frac{64}{\pi^5}\sum_0^\infty \frac{1}{(2i+1)^5}\cdot\frac{1-e^{-(2i+1)\pi}}{1+e^{-(2i+1)\pi}}\right\}.$$

Die stark convergirende Reihe hat den Werth 0,92165, und folglich ist:

$$G = 0{,}1405\,\mu\tau a^4.$$

Für den in G auftretenden Coefficienten ergibt sich aus Versuchen, die Duleau an Eisenstäben anstellte, der Werth 0,141; aus Versuchen dagegen, welche Savart an Kupferstäben angestellt hat, ergibt sich der Werth 0,137, und endlich fand Wertheim den Coefficienten gleich 0,1193 *(Comptes rendus XXVIII: Note sur les vibrations tournantes des verges carrées).*

4. Biegung eines prismatischen Stabes.

Wir betrachten hier ein Prisma, über das wir folgende Annahmen machen wollen. Das Prisma besitzt zwei auf ein-

ander senkrechte und axiale Hauptschnitte und ist also in Bezug auf jeden der letzteren symmetrisch begrenzt. Von den beiden gerade angesetzten Endflächen ist die eine befestigt, die andere frei. Die Axe des Prismas nehmen wir zur x-Axe und die Ebenen der beiden Hauptschnitte für die Ebenen der xy und xz. Den Anfangspunkt der Coordinaten legen wir in den Mittelpunkt der festen Endfläche.

In der Mitte der freien Endfläche wirke eine Kraft parallel der y-Axe; sie bedingt eine sehr kleine Biegung des Prismas. Ueber diese Biegung machen wir folgende Unterstellungen. Die Theilchen, welche ursprünglich in der xy-Ebene lagen, bleiben auch während der Deformation in dieser Ebene, und die Theilchen rechts und links von dieser Ebene sind in Bezug auf letztere symmetrisch gelegen. In dem nach aussen hin convexen Theile des gebogenen Prismas findet eine Dilatation, in dem nach aussen hin concaven Theile eine Compression statt. Der Werth dieser Dilatation und Compression nimmt nach dem freien Ende hin an Grösse ab. Wir setzen mit Rücksicht hierauf, unter A eine positive Constante, unter l die Länge des Prismas verstanden:

$$\theta = -A(l-x)y.$$

Auf den Seitenflächen findet ein Normaldruck nicht statt, wenn wir ferner annehmen:

$$N_y = N_z = 0, \quad T_x = 0.$$

Die drei ersten obiger Annahmen fallen mit folgenden drei Gleichungen zusammen:

$$\frac{d\xi}{dx} = \alpha(l-x)y, \quad \frac{d\eta}{dy} = -\beta(l-x)y, \quad \frac{d\zeta}{dz} = -\beta(l-x)y,$$

wo gesetzt ist:

$$-\frac{\lambda+\mu}{\mu}A = \alpha, \quad -\frac{\lambda}{2\mu}A = \beta.$$

Durch Integration findet man hieraus, unter f, g, h vorläufig noch unbekannte Functionen verstanden:

$$\xi = \frac{\alpha}{2}(2lx - x^2)y + f(y,z), \qquad \eta = -\frac{\beta}{2}(l-x)y^2 + g(x,z),$$

$$\zeta = -\beta(l-x)yz + h(x,y).$$

Berücksichtigt man nun, dass z und ζ gleichzeitig verschwinden müssen, und dass der Ausdruck T_x verschwinden soll, so ist zu setzen, wenn φ eine neue unbekannte Function bedeutet:

$$\xi = \frac{\alpha}{2}(2lx - x^2)y + f(y,z), \qquad \eta = -\frac{\beta}{2}(l-x)(y^2-z^2) + \varphi(x),$$
$$\zeta = -\beta(l-x)yz.$$

Wenn die gemachten Annahmen überhaupt zulässig sein sollen, so müssen die letzteren Ausdrücke den Bedingungsgleichungen für das elastische Gleichgewicht genügen. Durch die Substitution derselben in die Elasticitätsgleichungen erhält man nur zwei weitere Bedingungen, nämlich:

$$\varphi(x) = -\frac{\alpha}{2}(lx^2 - \tfrac{1}{3}x^3) + \gamma x,$$
$$D \ldots . \frac{d^2f}{dy^2} + \frac{d^2f}{dz^2} = 2\alpha y.$$

Ist also f eine Function von y und z, die wegen der vorausgesetzten Symmetrie zu beiden Seiten der xy-Ebene in Bezug auf z gerade ist und der Gleichung D) genügt, so stellen folgende Verschiebungen eine den Bedingungen des Gleichgewichtes genügende Deformation dar:

$$\xi = \frac{\alpha}{2}(2lx - x^2)y + f(y,z),$$
$$\eta = \gamma x - \frac{\alpha}{2}(lx^2 - \tfrac{1}{3}x^3) - \frac{\beta}{2}(l-x)(y^2-z^2),$$
$$\zeta = -\beta(l-x)yz.$$

Und für die so bestimmte Deformation ist dann:

$$N_x = -(3\lambda + 2\mu)A(l-x)y, \quad N_y = 0, \quad N_z = 0,$$
$$T_x = 0, \quad T_y = \mu\left(\frac{df}{dz} + \beta yz\right), \quad T_z = \mu\left[\frac{df}{dy} + \frac{\beta}{2}(y^2-z^2) + \gamma\right].$$

Man findet ferner auch noch für die Componenten der Elasticitätskraft, welche auf einem Querschnitte entwickelt wird:

$$X = N_x, \quad Y = T_z, \quad Z = T_y.$$

Endlich sind die Componenten der Elasticitätskraft, welche auf einem Längsschnitte entwickelt wird:

$$X = T_z \cos\beta + T_y \cos\gamma, \quad Y = 0, \quad Z = 0.$$

Die obigen Deformationen liefern für zwei bemerkenswerthe prismatische Formen, nämlich den elliptischen Cylinder und das rechtwinklige Parallelepipedum Gleichgewichtszustände, welche nur wenig von denen verschieden sein können, die dann eintreten, wenn das Prisma der Wirkung einer senkrecht zu seiner Axe wirkenden und in der Mitte des freien Endes angebrachten Kraft ausgesetzt wird. Und diese Fälle dürfen wir annähernd für die in Wirklichkeit stattfindenden setzen.

Was erstlich den elliptischen Cylinder betrifft, so beschränken wir uns hier auf den besonderen Fall, wo die Seitenaxen desselben einander gleich sind, und der Cylinder also ein gewöhnlicher Kreiscylinder wird. Das elastische Gleichgewicht des Stabes mit kreisförmigem Querschnitte erhalten wir durch folgende Lösung der Gleichung D):

$$f = gy + \frac{\alpha}{4} y\,(y^2 + z^2).$$

Dieselbe liefert:

$$T_y = -\frac{(2\lambda + \mu)\,A}{2} yz,$$

$$T_z = -\frac{(4\lambda + 3\mu)\,A}{4} y^2 - \frac{\mu A}{4} z^2 + (g + \gamma)\,\mu.$$

Hiernach kommt für die tangentiale Kraft, welche auf einem der Axe parallelen Querschnitte wirkt:

$$X = \frac{y}{r}\left\{-\frac{(4\lambda + 3\mu)\,A}{4}(y^2 + z^2) + (g + \gamma)\,\mu\right\},$$

wo r den Radius des Querschnittes bedeutet, und diese Kraft verschwindet für die Oberfläche, wenn wir setzen:

$$g + \gamma = \frac{(4\lambda + 3\mu)\,A}{4\mu} r^2.$$

Es verschwinden also bei dieser Annahme alle äusseren Kräfte auf dem Mantel des Cylinders. Was die an der freien Endfläche wirkenden Kräfte betrifft, so sind dieselben tangential. Fassen wir die gleichgerichteten Componenten derselben zusammen, so erhalten wir erstlich parallel der z-Axe vier Kräfte, von denen jede in einem der Quadranten der Endfläche an-

greift, welche durch die Ebenen der xy und xz bestimmt werden. Die beiden Kräfte, welche in den auf der concaven Seite des Stabes befindlichen Quadranten angreifen, sind nach der Mittelebene xy hingekehrt und gleich gross, die beiden Kräfte aber, welche in den auf der convexen Seite befindlichen Quadranten angreifen, suchen die Entfernung von der gedachten Mittelebene zu vergrössern und sind ebenfalls einander gleich. Zweitens erhalten wir eine der y Axe parallele Componente, die in der Mitte der freien Endfläche angreift, und für die man hat:

$$Y = \int T_z \, dO = (3\lambda + 2\mu) A \frac{r^4 \pi}{4} = (3\lambda + 2\mu) AJ,$$

wo dO das Element und J das Trägheitsmoment der Endfläche in Bezug auf einen ihrer Durchmesser ist. Jene Kraft wird nun der biegenden Kraft gleichkommen müssen, so dass sich also, wenn wir diese durch P bezeichnen, findet:

$$A = \frac{P}{(3\lambda + 2\mu) J}.$$

Wir betrachten hier zweitens das rechtwinklige Parallelepipedon für den Fall, dass es in einer seiner Hauptebenen gebogen wird, und nennen die zu der Biegungsebene senkrechte Kante c, die mit der y-Axe parallele Kante b. Damit hier die Druckkräfte an den Seitenflächen verschwinden, muss T_y für $z = \pm \frac{c}{2}$ und T_z für $y = \pm \frac{b}{2}$ verschwinden, und unsere Aufgabe besteht darin, eine Function f, die in Bezug auf z gerade ist und der Gleichung D) genügt, zu finden, so dass jene Bedingungen erfüllt werden. Nun wird aber jener Gleichung durch die Function:

$$y(g + hy^2 + kz^2)$$

genügt, wenn man hat:

1) $$3h + k = \alpha.$$

Ferner bemerke man, dass der Ausdruck

$$\frac{d^2 f}{dy^2} + \frac{d^2 f}{dz^2}$$

verschwindet, wenn für f einer der folgenden Ausdrücke gesetzt wird:

$$e^{my}\cos mz, \qquad e^{-my}\cos mz.$$

Wenn wir hiernach setzen:

$$f = y(g + hy^2 + kz^2) + \Sigma A_i e^{m_i y}\cos m_i z + \Sigma B_i e^{-m_i y}\cos m_i z,$$

so ist dies eine gerade Function von z, die der Gleichung D) genügt, und es fragt sich nur noch, ob die auftretenden Constanten sich so bestimmen lassen, dass die Ausdrücke T_y, T_z auf den betreffenden Seitenflächen verschwinden. Man findet nun:

$$\frac{T_y}{\mu} = (2k+\beta)yz - \Sigma m_i (A_i e^{m_i y} + B_i e^{-m_i y}) \sin m_i z,$$

$$\frac{T_z}{\mu} = (g+\gamma) + \left(3h + \frac{\beta}{2}\right) y^2 + \left(k - \frac{\beta}{2}\right) z^2 + \Sigma m_i (A_i e^{m_i y} - B_i e^{-m_i y}) \cos m_i z.$$

Der erste obiger Ausdrücke muss für $z = \pm \frac{c}{2}$ verschwinden, wir setzen daher:

2) $$2k + \beta = 0,$$

3) $$m_i = \frac{2i\pi}{c}.$$

Der Ausdruck für T_z muss für $y = \pm \frac{b}{2}$ verschwinden; desshalb und im Hinblick auf die durch die Fourier'schen Reihen gelieferte Entwickelung:

$$z^2 = \frac{c^2}{12} - \frac{c^2}{\pi^2}\left(\frac{\cos\frac{2\pi z}{c}}{1^2} - \frac{\cos\frac{4\pi z}{c}}{2^2} + \frac{\cos\frac{6\pi z}{c}}{3^2} - \ldots\ldots\right)$$

setzen wir:

4) $$(g+\gamma) + \left(3h + \frac{\beta}{2}\right)\frac{b^2}{4} + \left(k - \frac{\beta}{2}\right)\frac{c^2}{12} = 0,$$

5) $$A_i e^{\pm\frac{i\pi b}{c}} - B_i e^{\mp\frac{i\pi b}{c}} + \left(k - \frac{\beta}{2}\right)\frac{c^2}{2\pi^3}\cdot\frac{(-1)^i}{i^3} = 0,$$

und dehnen die Summe von $i = 1$ bis $i = \infty$ aus. Durch die Gleichungen 1) bis 5) ist die gesuchte Function vollständig bestimmt und erhalten wir:

$$T_y = \frac{\lambda c^2 A}{2\pi^2} \sum_1^\infty \frac{(-1)^i}{i^2} \cdot \frac{e^{\frac{2i\pi y}{c}} - e^{-\frac{2i\pi y}{c}}}{e^{\frac{i\pi b}{c}} + e^{-\frac{i\pi b}{c}}} \sin \frac{2i\pi z}{c},$$

$$T_z = -\frac{(3\lambda + 2\mu) A}{2}\left(y^2 - \frac{b^2}{4}\right) + \frac{\lambda A}{2}\left(z^2 - \frac{c^2}{12}\right)$$
$$- \frac{\lambda c^2 A}{2\pi^2} \sum_1^\infty \frac{(-1)^i}{i^2} \cdot \frac{e^{\frac{2i\pi y}{c}} + e^{-\frac{2i\pi y}{c}}}{e^{\frac{i\pi b}{c}} + e^{-\frac{i\pi b}{c}}} \cos \frac{2i\pi z}{c}.$$

Die an den Elementen der Endflächen thätigen Kräfte wirken in ähnlicher Weise, wie in dem oben betrachteten Falle des cylindrischen Stabes, und für ihre in der Mitte angreifende Resultante findet man:

$$\int T_z \, dO = (3\lambda + 2\mu) A \frac{b^3 c}{12} = (3\lambda + 2\mu) AJ,$$

wenn J wieder das Trägheitsmoment des Querschnittes in Bezug auf seine zur Biegungsebene senkrechte Mittellinie ist. Bezeichnen wir die biegende Kraft durch P, so ist auch in diesem Falle:

$$A = \frac{P}{(3\lambda + 2\mu) J}.$$

Fassen wir jetzt die für den cylindrischen und rechtwinklig viereckigen Stab gewonnenen Resultate zusammen, so ergeben sich folgende für beide gültigen Relationen.

Die Constante γ wird durch die Analyse nicht bestimmt, sondern nur die Summe $g + \gamma$. Es hängt dies damit zusammen, dass die Verschiebungen $\xi = gy$, $\eta = -gx$ eine Rotation des ganzen Stabes vorstellen, wobei eben so wenig Elasticitätskräfte entwickelt werden, als dies bei den Verschiebungen $\xi = \mathfrak{a}$, $\eta = \mathfrak{b}$, $\zeta = \mathfrak{c}$ der Fall ist, welche eine Verschiebung des ganzen Körpers darstellen. Mit Rücksicht hierauf können wir $\gamma = 0$ setzen und erhalten dann für die Gleichung der Curve, in welcher die Theilchen liegen, die ursprünglich auf der Axe des Stabes lagen, d. i. für die Gleichung der sogenannten elastischen Curve:

$$y = \frac{\lambda + \mu}{2\mu} A (lx^2 - \tfrac{1}{3} x^3).$$

Die Curve ist also eine cubische Parabel, welche die x-Axe im Ursprunge der Coordinaten berührt und deren Inflexionspunkt in der Mitte der Endfläche liegt.

Denken wir uns den prismatischen Stab durch einen Querschnitt in zwei Theile getheilt und ersetzen wir die Wirkung des eingeklemmten Stückes auf das abgeschnittene Ende durch die Kräfte $-N_x$, $-T_y$, $-T_z$, so müssen sich die an letzterem Theile wirkenden Kräfte für sich das Gleichgewicht halten. Die Kräfte $-N_x$ lassen sich ersetzen durch ein Gegenpaar, für dessen Moment man hat:

$$G = \int N_x y \, dO = -(3\lambda + 2\mu) A J (l - x) = -P(l - x).$$

Die Kräfte $-T_y$ heben sich auf und die Kräfte $-T_z$ liefern als Resultante eine in der Mitte des Querschnittes angreifende Kraft, die in der Richtung der negativen y-Coordinate wirkt, und für deren absoluten Werth man hat:

$$T = -(3\lambda + 2\mu) A J = -P.$$

Letztere Kraft bildet mit der Kraft P ein Gegenpaar, das dem Paare G das Gleichgewicht hält.

Man hat ferner:

$$\frac{N_x}{\frac{d\xi}{dx}} = \frac{3\lambda + 2\mu}{1 + \frac{\lambda}{\mu}} = q;$$

also ist auch hier das Verhältniss zwischen dem Normaldrucke N_x und der linearen Dilatation $\frac{d\xi}{dx}$ dem Elasticitätscoefficienten gleich, wie bei einem Prisma, das nur eine longitudinale Verlängerung oder Verkürzung erleidet.

Da die Ordinaten der elastischen Curve, sowie ihre Krümmung sehr klein sind, so können wir das Quadrat von $\frac{dy}{dx}$ vernachlässigen und finden für den Krümmungsradius R:

$$\frac{1}{R} = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\lambda + \mu}{\mu} A (l - x),$$

so dass man hat:

$$\frac{1}{R} = \frac{P(l - x)}{qJ}.$$

Für das Gegenpaar G, das sogenannte elastische Moment des Prismas, kann man hiernach auch setzen:

$$G = -\frac{qJ}{R}.$$

Wenn wir den Elasticitätscoefficienten q einführen, so kommt für die Gleichung der elastischen Curve:

$$y = \frac{P}{2qJ}(lx^2 - \tfrac{1}{3}x^3).$$

Hieraus findet man für die Senkung y' des freien Endes:

$$y' = \frac{Pl^3}{3qJ},$$

und für die Tangente des Winkels φ', welchen die Berührungslinie am freien Ende mit der ursprünglichen Axe bildet, ergibt sich:

$$tang\ \varphi' = \frac{Pl^2}{2qJ} = \frac{3y'}{2l}.$$

Wenn der Angriffspunkt der Kraft P nicht im freien Ende, sondern in der Entfernung d vom eingeklemmten Ende auf der mittleren Faser liegt, so nimmt der Stab von der eingeklemmten Stelle bis zu jenem Angriffspunkte die durch die vorhergehende Analyse bestimmte Gestalt an und verläuft von dort bis zum freien Ende gerade. Wenn also η die Senkung, φ die Neigung desjenigen Punktes ist, an welchem die Kraft wirkt, so hat man:

$$\eta = \frac{Pd^3}{3qJ}, \quad tang\ \varphi = \frac{3\eta}{2d}.$$

Hiernach ist unabhängig von der Lage des Angriffspunktes und der Grösse der Kraft:

$$\frac{d}{\eta}\, tang\ \varphi = \tfrac{3}{2}.$$

Diese Formel wird durch die von Kupffer über die Biegsamkeit der Metalle angestellten Versuche bestätigt (Bulletin der Petersburger Academie; Bd. XII: Untersuchungen über die Biegung elastischer Metallstäbe).

Wenn der Stab so eingeklemmt ist, dass die Kante $2b$ vertical steht, so biegt er sich schon in Folge der Schwerkraft. Annähernd kann man die Wirkung der letzteren in Bezug auf

die Senkung, sofern letztere sehr klein ist, durch die einer gewissen constanten Kraft p ersetzen, welche in der Entfernung d angreift. Man hat dann für die durch die Schwere allein bewirkte Biegung:

$$\eta_1 = \frac{p d^3}{3 q J}.$$

Wird das Prisma überdies durch die in der Entfernung d angreifende Last P gebogen, so hat man für die Gesammtbiegung:

$$\eta_2 = \frac{(P+p)\, d^3}{3 q J}.$$

Für die beiden letzten Gleichungen kann man aber mit Rücksicht auf die obige Gleichung für den Berührungswinkel in der Entfernung d schreiben:

$$q = \frac{p d^2}{2 J\, tang\, \varphi_1} = \frac{(P+p)\, d^2}{2 J\, tang\, \varphi_2}.$$

Durch Beobachtung der Neigungen φ_1 und φ_2 des unbelasteten und des belasteten Stabes erhält man hiernach zwei Gleichungen, deren Auflösung den Elasticitätscoefficienten q liefert. Nach der hier angedeuteten Methode bestimmte Kupffer denselben bei prismatischen Stäben und Drähten aus verschiedenen Metallen. Aus seinen Angaben sind die folgenden Werthe dieser Grösse für das hier zu Grunde gelegte Maass berechnet.

Metall:	Elasticitäts-coefficient:	Metall:	Elasticitäts-coefficient:
Stahl No. 6	2108	Messing . .	1071
Eisen No. 3	1928	Platin . .	1769

III.

Ueber die oscillatorischen Bewegungen in homogenen, isotropen Körpern.

1. Gleichungen für die oscillatorischen Bewegungen homogener und isotroper Körper.

Die Gleichungen, welche die Gesetze solcher Bewegungen elastischer Körper darstellen, bei denen die Molecüle sehr kleine Schwingungen um ihre Ruhelage herum ausführen, werden nach dem d'Alembert'schen Principe aus den statischen Gleichungen abgeleitet, wenn man an die Stelle der Kräfte, welche an den Theilchen des Körpers wirken und deren Componenten durch X_i, Y_i, Z_i bezeichnet wurden, die verlorenen Kräfte treten lässt. Indem wir die früheren Bezeichnungen beibehalten und insbesondere die Verschiebungen der Theilchen nach den Coordinatenaxen, oder die Componenten ihrer Ausschläge nach denselben durch ξ, η, ζ bezeichnen, erhalten wir für die der Zeit t entsprechenden Coordinaten eines Theilchens:

$$x+\xi, \quad y+\eta, \quad z+\zeta.$$

Da nun x, y, z als Coordinaten der Gleichgewichtslage von der Zeit unabhängig sind, so stellen sich die Componenten der verlorenen Kräfte wie folgt dar:

$$X_i - \frac{d^2\xi}{dt^2}, \quad Y_i - \frac{d^2\eta}{dt^2}, \quad Z_i - \frac{d^2\zeta}{dt^2}.$$

Hiernach erhält man für die gesuchten Gleichungen der Bewegung:

$$(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dx}+\mu\Delta^2\xi=\varrho\left(\frac{d^2\xi}{dt^2}-X_i\right),$$
$$(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dy}+\mu\Delta^2\eta=\varrho\left(\frac{d^2\eta}{dt^2}-Y_i\right),$$
$$(\lambda+\mu)\frac{d\theta}{dz}+\mu\Delta^2\zeta=\varrho\left(\frac{d^2\zeta}{dt^2}-Z_i\right).$$

Für die Oberfläche gelten dieselben Gleichungen, wie beim Gleichgewichte; die Richtung und Grösse der an der Oberfläche wirkenden Kräfte wird jetzt aber im Allgemeinen von der Zeit abhängig sein.

In den Anwendungen, welche wir von den vorstehenden Bewegungsgleichungen machen werden, werden wir von den äusseren Kräften ganz absehen. Ferner schränken wir den Kreis unserer Betrachtungen noch weiter dadurch ein, dass wir nur permanente periodische Bewegungen erörtern, und zwar nur solche, welche sich nach dem Principe der Coexistenz, das offenbar auch hier gelten wird, auf geradlinige Oscillationen zurückführen lassen, die nach demselben Gesetze, wie die unendlich-kleinen Schwingungen eines mathematischen Pendels vor sich gehen, und gleichzeitig beginnen und gleichlange dauern. Eine aus solchen Oscillationen bestehende Elementar-Bewegung lässt sich offenbar, wenn $\mathfrak{x}$, $\mathfrak{y}$, $\mathfrak{z}$ die sehr kleinen Componenten der Amplitude und δ die Dauer einer ganzen Oscillation bedeutet, und wenn der Anfang der Zeit gehörig gewählt wird, wie folgt darstellen:

$$\xi=\mathfrak{x}\sin\frac{2\pi}{\delta}t,\quad \eta=\mathfrak{y}\sin\frac{2\pi}{\delta}t,\quad \zeta=\mathfrak{z}\sin\frac{2\pi}{\delta}t.$$

Wie bei den Verschiebungen eines im Gleichgewichte befindlichen deformirten Körpers, so unterscheiden wir auch bei seinen Oscillationen zwei Hauptgruppen, die den attractorischen und rotatorischen Verschiebungen entsprechen, und die wir desshalb auch attractorische und rotatorische Oscillationen nennen wollen. Jene, welche die Longitudinal-Schwingungen in sich begreifen, sind im Allgemeinen von einer Dilatation begleitet, und ihre Ausschläge oder auch ihre Amplituden lassen sich als Differentialquotienten einer und derselben Function darstellen, so dass man, unter V eine solche Function verstanden, hat:

$$\xi = \frac{dV}{dx}, \quad \eta = \frac{dV}{dy}, \quad \zeta = \frac{dV}{dz}.$$

Die Substitution in die Bewegungsgleichungen lässt ersehen, dass der Ausdruck

$$(\lambda + 2\mu)\,\Delta^2 V + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \varrho\, V$$

in der ganzen Ausdehnung des Körpers constant bleiben muss. Unbeschadet der Allgemeinheit können wir diese Bedingung, indem wir noch

$$\frac{\lambda + 2\mu}{\varrho} = \Omega^2$$

setzen, durch folgende Gleichung ausdrücken:

$$\text{I)} \qquad \Omega^2 \Delta^2 V + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 V = 0.$$

Für die Dilatation hat man: $\theta = \Delta^2 V \sin \frac{2\pi}{\delta} t.$

Unter rotatorischen Elementar-Oscillationen verstehen wir solche, deren Amplituden folgende Form haben:

$$\xi = \frac{dv}{dz} - \frac{dw}{dy}, \quad \eta = \frac{dw}{dx} - \frac{du}{dz}, \quad \zeta = \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx}.$$

Bei diesen Oscillationen findet eine Dilatation nicht statt. Die Substitution in die Bewegungsgleichungen liefert:

$$\frac{d\left[\mu\Delta^2 v + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \varrho\, v\right]}{dz} = \frac{d\left[\mu\Delta^2 w + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \varrho\, w\right]}{dy},$$

$$\frac{d\left[\mu\Delta^2 w + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \varrho w\right]}{dx} = \frac{d\left[\mu\Delta^2 u + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \varrho\, u\right]}{dz},$$

$$\frac{d\left[\mu\Delta^2 u + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \varrho u\right]}{dy} = \frac{d\left[\mu\Delta^2 v + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \varrho\, v\right]}{dx}.$$

Hieraus folgt, dass die Hülfsfunctionen u, v, w folgenden Gleichungen zugleich genügen müssen:

$$\text{II)} \quad \begin{cases} \omega^2\Delta^2 u + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 u = \frac{d\varphi}{dx}, \quad \omega^2\Delta^2 v + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 v = \frac{d\varphi}{dy}, \\ \omega^2\Delta^2 w + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 w = \frac{d\varphi}{dz}, \end{cases}$$

wo φ eine beliebige Function der Coordinaten bedeutet und wo gesetzt ist:

$$\frac{\mu}{\varrho} = \omega^2.$$

Man bemerke, dass die Gleichung I) durch folgenden Ausdruck, der die Potentialfunction als besonderen Fall umfasst, befriedigt wird:

$$V = \int \frac{a \cos\left(\frac{2\pi}{\Omega\delta} r + b\right)}{r} dk + \frac{4\pi a \cos b}{\left(\frac{2\pi}{\Omega\delta}\right)^2}.$$

Es bedeutet hier dk das cubische Element eines Raumes K, welcher den elastischen Körper ganz umschliesst, übrigens aber beliebig ist. Die Entfernung des Elementes dk von dem Punkte (x, y, z), auf den sich der Ausdruck bezieht, ist r. Endlich sind a und b Functionen der Coordinaten, die bloss der Bedingung unterworfen sind, dass $a \cos b$ in der ganzen Ausdehnung des elastischen Körpers einen constanten Werth behalte. Dass die Function V in der That der Differentialgleichung I) genügen müsse, wird in ganz ähnlicher Weise bewiesen, wie der entsprechende Satz von der gewöhnlichen Potentialfunction. Bezeichnet man nämlich das Integral, welches das erste Glied von V bildet, mit W, so findet man durch zweimalige Differentiation von W für jeden Punkt (x, y, z) ausserhalb des Raumes K:

$$\Delta^2 W = -\left(\frac{2\pi}{\Omega\delta}\right)^2 W.$$

Liegt dagegen der Punkt (x, y, z) innerhalb des Raumes K, so denke man sich um denselben mit verschwindend kleinem Radius eine Kugel beschrieben, deren Element dk_2 und deren Volumen k_2 heissen möge. Der Theil von W, der sich auf den ausserhalb der fraglichen Kugel gelegenen Theil des Raumes K bezieht, heisse W_1; für ihn ist der Punkt (x, y, z) ein äusserer. Dagegen heisse der Theil von W, der sich auf die kleine Kugel bezieht, W_2. Man hat nun zunächst wie vorhin:

$$\Delta^2 W_1 = -\left(\frac{2\pi}{\Omega\delta}\right)^2 W_1.$$

Ferner hat man in Anbetracht, dass a und b für W_2 als constant zu betrachten sind, und dass r in demselben Ausdrucke unendlich klein bleibt, durch Entwickelung der trigonometrischen Functionen:

$$W_2 = a\int\left(\cos\frac{2\pi}{\Omega\delta}r\cos b - \sin\frac{2\pi}{\Omega\delta}r\sin b\right)\frac{dk_2}{r}$$
$$= a\cos b\int\frac{dk_2}{r} - \frac{2a\pi}{\Omega\delta}\sin b\int dk_2$$
$$= a\cos b\int\frac{dk_2}{r} - \frac{2ak_2\pi}{\Omega\delta}\sin b.$$

In diesem Ausdrucke ist das zweite Glied constant und das Integral $\int\frac{dk_2}{r}$ ein gewöhnliches Potential; man hat daher:

$$\Delta^2 W_2 = -4\pi a\cos b.$$

Da nun $W = W_1 + W_2$ ist, so folgt für jeden innerhalb K gelegenen Punkt:

$$\Delta^2 W = -4\pi a\cos b - \left(\frac{2\pi}{\Omega\delta}\right)^2 W,$$

da ja auch W_2 unendlich klein ist, also W statt W_1 geschrieben werden kann. Da aber $a\cos b$ innerhalb des elastischen Körpers constant sein soll, so ist für die ganze Ausdehnung desselben $\Delta^2 V = \Delta^2 W$. Daraus folgt endlich sofort, dass V der Gleichung I) genügt.

Den constanten Theil der Function V kann man, da er bei der Bestimmung des Ausschlages ohne Bedeutung ist, unterdrücken.

Eine Lösung der Gleichungsgruppe II) wird erhalten, wenn man die Grössen a, b, c und α, β, γ so bestimmt, dass, unter ψ eine willkürliche Function der Coordinaten verstanden, in der ganzen Ausdehnung des elastischen Körpers

$$a\cos\alpha = \frac{d\psi}{dx},\quad b\cos\beta = \frac{d\psi}{dy},\quad c\cos\gamma = \frac{d\psi}{dz}$$

wird, und wenn man alsdann setzt:

$$u=\int \frac{a\cos\left(\frac{2\pi}{\omega\delta}r+\alpha\right)}{r}dk, \quad v=\int \frac{b\cos\left(\frac{2\pi}{\omega\delta}r+\beta\right)}{r}dk,$$

$$w=\int \frac{c\cos\left(\frac{2\pi}{\omega\delta}r+\gamma\right)}{r}dk.$$

Hier bedeutet wiederum dk das cubische Element eines Raumes, welcher den elastischen Körper ganz umschliesst, und r die Entfernung des Punktes (x, y, z) von jenem Elemente. Dass diese Ausdrücke den Gleichungen II) in der That genügen, ist aus dem oben über den Ausdruck V Gesagten sofort ersichtlich.

Die Analogie der vorhergehenden Lösungen mit den früher für die statischen Gleichungen angegebenen springt in die Augen, und es werden letztere ersichtlich aus den gegenwärtigen gewonnen, wenn man $\frac{2\pi}{\omega\delta}=0$ setzt.

2. Erforschung specieller Fälle oscillatorischer Bewegungen, bei welchen eine Dilatation stattfindet.

1. Denkt man sich die Function V, welche zur Bestimmung longitudinaler Schwingungen dient, als bloss von der Coordinate z abhängig, so geht die Gleichung I) in folgende über:

$$\Omega^2\frac{d^2V}{dz^2}+\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2V=0.$$

Die Integration derselben liefert:

$$V=c\cos\left(\frac{2\pi}{\Omega\delta}z+b\right),$$

wo b und c willkürliche Constanten sind.

Mittelst dieses Integrals ergibt sich eine oscillatorische Bewegung, die, unter c eine sehr kleine, übrigens aber willkürliche Constante verstanden, sich wie folgt bei gehöriger Wahl des Anfangspunktes der Coordinaten und des Anfanges der Zeit darstellen lässt:

$$\xi=0, \quad \eta=0, \quad \zeta=c\sin\frac{2\pi}{\Omega\delta}z\sin\frac{2\pi}{\delta}t.$$

Die Dilatation ist:

$$\theta = \frac{2\pi c}{\Omega\delta} \cos\frac{2\pi}{\Omega\delta} z \sin\frac{2\pi}{\delta} t.$$

Die durch diese Ausschläge bestimmte Bewegung characterisirt sich durch folgende Eigenschaften.

Alle Theilchen des schwingenden Körpers befinden sich zu derselben Zeit in demselben Oscillationszustande; ihre Ausschläge sind parallel der z-Axe. Ueberdies sind die Ausschläge aller Theilchen, welche in einer zur z-Axe senkrechten Ebene liegen, gleich. Die Grösse der Amplituden für eine Reihe von Theilchen, die auf einer mit der z-Axe parallelen Geraden liegen, ändert sich wie eine Sinusfunction, deren Periode $\Omega\delta$ ist; die Dilatation dagegen ändert sich wie die entsprechende Cosinusfunction. Die Bäuche, in welchen die Amplitude ihr Maximum erreicht, während die Dilatation verschwindet, treten hiernach auf in den Ebenen, für welche z einen der folgenden Werthe hat:

$$\ldots. -\tfrac{5}{4}\Omega\delta,\ -\tfrac{3}{4}\Omega\delta,\ -\tfrac{1}{4}\Omega\delta,\ +\tfrac{1}{4}\Omega\delta,\ +\tfrac{3}{4}\Omega\delta,\ +\tfrac{5}{4}\Omega\delta, \ldots.$$

die Knotenebenen hingegen, in welchen die Amplitude verschwindet und die Dilatation resp. Compression ihr Maximum erreicht, sind die Ebenen, in welchen z einen der folgenden Werthe hat:

$$\ldots. -\tfrac{3}{2}\Omega\delta,\ -\Omega\delta,\ -\tfrac{1}{2}\Omega\delta,\ 0,\ +\tfrac{1}{2}\Omega\delta,\ +\Omega\delta,\ +\tfrac{3}{2}\Omega\delta \ldots.$$

Wenn der schwingende Körper prismatisch ist und seine Seitenflächen der z-Axe parallel sind, während die Grundflächen auf derselben senkrecht stehen, so muss, sofern die Bewegung erhalten bleiben soll, auf jede Seitenfläche ein Normaldruck stattfinden, dessen Grösse durch den Ausdruck:

$$\frac{2\lambda c\pi}{\Omega\delta} \cos\frac{2\pi}{\Omega\delta} z \sin\frac{2\pi}{\delta} t$$

gegeben ist, während auf die Grundflächen der normale Druck:

$$\frac{2(\lambda+2\mu)\, c\pi}{\Omega\delta} \cos\frac{2\pi}{\Omega\delta} z \sin\frac{2\pi}{\delta} t$$

wirken muss.

Es ist leicht, die vorhergehenden Betrachtungen auf diejenigen stehenden Longitudinal-Schwingungen auszudehnen, für welche man hat:

$$V = c \cos mx \cos mz,$$

sowie:

$$V = c \cos mx \cos my \cos mz,$$

welche Functionen ebenfalls der Bedingungsgleichung I) genügen. Aus der Combination der stehenden Schwingungen:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = c \cos \frac{2\pi}{\Omega\delta} z \sin \frac{2\pi}{\delta} t$$

und:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = -c \sin \frac{2\pi}{\Omega\delta} z \cos \frac{2\pi}{\delta} t,$$

welche unter die Klasse der betrachteten fallen, ergibt sich als resultirende Bewegung:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = c \sin \frac{2\pi}{\Omega\delta} (\Omega t - z).$$

Hier befinden sich nicht mehr alle Theilchen, sondern nur solche, die auf einer zur z-Axe senkrechten Ebene liegen, in demselben Oscillationszustande, und wir haben es hier nicht mehr mit stehenden, sondern mit fortschreitenden Longitudinal-Schwingungen zu thun. Der Oscillationszustand, welcher zu einer bestimmten Zeit in einer zur z-Axe senkrechten Ebene stattfindet, pflanzt sich mit der constanten Geschwindigkeit Ω in der Richtung von $-z$ nach $+z$ fort. Zwischen zweien dieser Ebenen, die um $\Omega\delta$ von einander abstehen, sind alle Oscillationsstufen vertreten. Der Inbegriff der Theilchen zwischen zwei solchen Ebenen heisst eine ebene Welle, $\Omega\delta$ ihre Länge, Ω ihre Geschwindigkeit.

Bei beliebiger Wahl der Coordinatenaxen und des Anfangspunktes der Zeit wird eine in ebenen Wellen fortschreitende Bewegung von Longitudinal-Schwingungen wie folgt dargestellt:

$$\xi = c \cos \alpha \sin F, \quad \eta = c \cos \beta \sin F, \quad \zeta = c \cos \gamma \sin F,$$

wo zu setzen ist:

$$F = \frac{2\pi}{\Omega\delta} (\Omega t - \{x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma\} + \varphi).$$

Es ist alsdann c die Amplitude der einzelnen Schwingung, α, β, γ sind die Winkel, welche die Normale der Welle mit den Axen einschliesst.

Die Theilchen einer Luftmasse, welche von ebenen Schallwellen durchzogen wird, befinden sich in dem eben betrachteten Bewegungszustande.

Man bemerke noch, dass zwei in derselben Richtung fortschreitende ebene Wellen von gleicher Wellenlänge, die wir durch

$$\zeta = c \sin \frac{2\pi}{\Omega\delta}(\Omega t - z + \varphi), \quad \zeta' = c' \sin \frac{2\pi}{\Omega\delta}(\Omega t - z + \varphi')$$

darstellen können, sich zu einer neuen in derselben Richtung fortschreitenden ebenen Welle zusammensetzen, in der die Wellenlänge auch wieder dieselbe ist:

$$Z = C \sin \frac{2\pi}{\Omega\delta}(\Omega t - z + \Phi);$$

die Amplitude C und die Phase Φ sind gegeben durch die Gleichungen:

$$c \cos \frac{2\pi}{\Omega\delta}\varphi + c' \cos \frac{2\pi}{\Omega\delta}\varphi' = C \cos \frac{2\pi}{\Omega\delta}\Phi,$$

$$c \sin \frac{2\pi}{\Omega\delta}\varphi + c' \sin \frac{2\pi}{\Omega\delta}\varphi' = C \sin \frac{2\pi}{\Omega\delta}\Phi.$$

Entwickelt man hieraus C, so kommt:

$$C^2 = c^2 + c'^2 + 2cc' \cos \frac{2\pi}{\Omega\delta}(\varphi - \varphi'),$$

woraus man sieht, dass die Amplitude C je nach dem Phasenunterschiede $\varphi - \varphi'$ alle Werthe von 0 bis $c + c'$ durchlaufen kann.

Dagegen setzen sich zwei fortschreitende Wellen von gleicher Amplitude und entgegengesetzter Richtung zu einer stehenden Schwingung zusammen; so geben die beiden Wellen:

$$\zeta = c \sin \frac{2\pi}{\Omega\delta}(\Omega t - z + \varphi), \quad \zeta' = c \sin \frac{2\pi}{\Omega\delta}(\Omega t + z + \varphi')$$

als Resultante die stehende Schwingung:

$$Z = 2c \cos \frac{2\pi}{\Omega\delta}[z + \tfrac{1}{2}(\varphi' - \varphi)] \sin \frac{2\pi}{\delta}\left[t + \frac{\varphi + \varphi'}{2\Omega}\right].$$

2. Wenn die in der Bedingungsgleichung I) auftretende Grösse V eine Function der Entfernung r von der z-Axe ist, ausserdem aber keine der Coordinaten enthält, so kann man für die besagte Gleichung I) schreiben:

$$\frac{d^2V}{dr^2}+\frac{1}{r}\cdot\frac{dV}{dr}+k^2V=0,$$

wo $k=\frac{2\pi}{\Omega\delta}$ zu setzen ist. Durch die Substitution:

$$r=\frac{s}{k}$$

geht die letzte Gleichung über in folgende:

$$\frac{d^2V}{ds^2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{dV}{ds}+V=0.$$

Substituirt man die Reihe:

$$V=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3+\ldots.$$

in die vorhergehende Differentialgleichung, so findet man ein erstes particuläres Integral derselben:

$$V_1=1-\frac{s^2}{2^2}+\frac{s^4}{2^2\cdot4^2}-\frac{s^6}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}+\ldots,$$

welche Reihe für jedes s convergirt. Das zweite particuläre Integral lässt sich bekanntlich aus dem ersten ableiten und zwar ist:

$$V_2=V_1\int\frac{ds}{sV_1^2}.$$

Da die directe Ausrechnung dieses Ausdruckes beschwerlich sein würde, so bemerke man, dass V_2 folgende Form haben muss:

$$V_2=V_1\log s+b_2s^2+b_4s^4+b_6s^6+\ldots.,$$

wofür wir setzen wollen:

$$V_2=V_1\log s+R.$$

Substituirt man diesen Ausdruck in die gegebene Differentialgleichung, wobei zu beachten ist, dass V_1 dieselbe befriedigt, so erhält man zur Bestimmung von R:

$$\frac{d^2R}{ds^2}+\frac{1}{s}\cdot\frac{dR}{ds}+R=-\frac{2}{s}\cdot\frac{dV_1}{ds}.$$

Entwickelt man diese Gleichung, indem man für R und V_1 die gleichgeltenden Reihen setzt, so gelangt man sofort zur Bestimmung der Coefficienten in R und zwar findet man:

$$R=\frac{1}{2^2}s^2-\frac{1+\frac{1}{2}}{2^2\cdot4^2}s^4+\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{2^2\cdot4^2\cdot6^2}s^6-\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}}{2^2\cdot4^2\cdot6^2\cdot8^2}s^8+\ldots$$

Hiernach ist nun auch das zweite particuläre Integral gefunden. Führt man folgende Bezeichnung ein:

$$P(u) = 1 + \frac{u}{(1!)^2} + \frac{u^2}{(2!)^2} + \frac{u^3}{(3!)^2} + \ldots,$$

$$Q(u) = P(u) \cdot \log 2\sqrt{-u} - \left[\frac{1}{(1!)^2}u + \frac{1+\frac{1}{2}}{(2!)^2}u^2 + \frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{(3!)^2}u^3 + \ldots\right],$$

so hat man für das vollständige Integral der betrachteten Differentialgleichung, wenn noch a und b zwei willkürliche Constanten bedeuten:

$$V = aP\left(-\frac{k^2r^2}{4}\right) + bQ\left(-\frac{k^2r^2}{4}\right).$$

Mittelst dieser Lösung erhält man folgende Componenten für die senkrecht zur z-Axe vor sich gehenden Schwingungen:

$$\xi = x\left(a\frac{dP}{du} + b\frac{dQ}{du}\right)\sin\frac{2\pi}{\delta}t,$$

$$\eta = y\left(a\frac{dP}{du} + b\frac{dQ}{du}\right)\sin\frac{2\pi}{\delta}t,$$

$$\zeta = 0,$$

wo a und b wieder zwei willkürliche Constanten bedeuten und

$$u = -\left(\frac{\pi}{\Omega\delta}\right)^2 r^2$$

zu setzen ist.

Bei der gefundenen Bewegung befinden sich alle Theilchen eines Cylinders, dessen Axe in die z-Axe fällt, in demselben Oscillationszustande.

Es ist leicht, die obige Analyse auf den Fall auszudehnen, wo V die Form

$$f(r)\cos mz$$

hat. Setzt man $m = \frac{2\pi}{\Omega\delta}$, so findet man $f(r) = c\log c'r$, wo c und c' constant sind. Ein Hohlcylinder zeigt jetzt Longitudinal- und Radialschwingungen, deren Beschaffenheit im Einzelnen leicht aufzufinden ist.

3. Es kann die Function V, mittelst deren sich die Amplituden darstellen lassen, bloss die Entfernung r von einem festen Punkte enthalten. Alsdann erhält man stehende Schwingungen, deren Phase für alle Theilchen dieselbe ist, welche

auf einer um den festen Punkt beschriebenen Kugelfläche liegen, und alle Schwingungen finden in der Richtung der von diesem Punkte ausgehenden Strahlen statt. Die Gleichung I), die zur Bestimmung der Function V dient, nimmt alsdann diese Gestalt an:

$$\frac{d^2V}{dr^2} + \frac{2}{r}\cdot\frac{dV}{dr} + k^2V = 0,$$

wo $k = \frac{2\pi}{\Omega\delta}$ zu setzen ist. Das vollständige Integral dieser linearen Differentialgleichung können wir so schreiben:

$$V = -\frac{a}{r}\cos(kr+b),$$

wo a und b willkürliche Constanten sind. Für die Ausschläge der gefundenen Bewegung erhält man folgende Ausdrücke:

$$\xi = a\left\{\frac{kx}{r^2}\sin R + \frac{x}{r^3}\cos R\right\}\sin D,$$

$$\eta = a\left\{\frac{ky}{r^2}\sin R + \frac{y}{r^3}\cos R\right\}\sin D,$$

$$\zeta = a\left\{\frac{kz}{r^2}\sin R + \frac{z}{r^3}\cos R\right\}\sin D,$$

wo gesetzt ist: $kr+b = R$, $\frac{2\pi}{\delta}t = D$.

Durch Zusammensetzung der letzteren Bewegung und einer zweiten gleichartigen, welcher die Function

$$Y = \frac{a}{r}\sin(kr+b)$$

zu Grunde gelegt ist, und bei der überdies an die Stelle von D die Grösse $\frac{\pi}{2} - D$ gesetzt ist, findet man eine neue Bewegung, die sich bei gehöriger Wahl des Zeitanfanges wie folgt darstellen lässt:

$$\xi = a\left\{\frac{kx}{r^2}\cos F + \frac{x}{r^3}\sin F\right\},$$

$$\eta = a\left\{\frac{ky}{r^2}\cos F + \frac{y}{r^3}\sin F\right\},$$

$$\zeta = a\left\{\frac{kz}{r^2}\cos F + \frac{z}{r^3}\sin F\right\},$$

wo zu setzen ist: $F = \frac{2\pi}{\delta}t - kr = \frac{2\pi}{\Omega\delta}(\Omega t - r)$.

Die durch diese Gleichungen bestimmte Bewegung besteht in dem gleichförmigen Fortschreiten und Sich-Ausbreiten sphärischer Wellen mit auf diesen senkrecht stehenden Schwingungen. Die Geschwindigkeit der Fortpflanzung ist Ω, die Breite einer Welle $\Omega\delta$. Wenn man das Vorzeichen von k umkehrt, erhält man eine analoge Bewegung, wobei sich aber die sphärischen Wellen gleichförmig zusammenziehen.

Die betrachtete Bewegung lässt sich als Resultante zweier Bewegungen mit sphärischen Wellen betrachten, deren Phasen sich um $\frac{\pi}{2}$ von einander unterscheiden, und von denen die eine die Amplitude $\frac{ak}{r}$ hat, während die Amplitude der anderen $\frac{a}{r^2}$ ist. Den Ausschlag jeder der beiden Einzelbewegungen kann man in der Form

$$f(r)\cos\left(\frac{2\pi}{\delta}t - kr\right)$$

darstellen. In einer Entfernung von dem Oscillationscentrum, d. h. dem Mittelpunkte der Wellen, welche gegen die Breite der Wellen sehr gross ist, verschwindet die zweite Bewegung gegen die erstere, und hat man für den Ausschlag in der Richtung eines Strahles:

$$\frac{ak}{r}\cos\frac{2\pi}{\Omega\delta}(\Omega t - r),$$

so dass also die Amplitude der Entfernung vom Oscillationscentrum umgekehrt proportional ist.

Denken wir uns, dass der schwingende Körper von einer Kugelfläche begrenzt werde, welche den Wellenflächen concentrisch ist, so erleidet für den Fall, dass die Bewegung permanent ist, die Oberfläche allenthalben einen Normalzug, für den man findet:

$$N = \frac{(\lambda+2\mu)\,ak^2}{r}\sin F - 2\mu a\left\{\frac{2k}{r^2}\cos F + \frac{2}{r^3}\sin F\right\},$$

wo wieder zu setzen ist:

$$F = \frac{2\pi}{\Omega\delta}(\Omega t - r).$$

Für den Weg ds, welchen das Flächenelement während der Zeit dt beschreibt, findet man, wenn σ den Ausschlag bedeutet:

$$ds = \frac{d\sigma}{dt}\,dt = \frac{2a\pi}{\delta}\left(-\frac{k}{r}\sin F + \frac{1}{r^2}\cos F\right)dt.$$

Hiernach ist die von der Normalkraft während einer Oscillation geleistete Arbeit:

$$\int_0^\delta N\frac{d\sigma}{dt}\,dt = -(\lambda+2\mu)\left(\frac{ak}{r}\right)^2\pi k,$$

und wenn die Oscillationsdauer sehr klein ist, wie dies meistens stattfindet, so kann man auch, unter n die Anzahl der in der Zeiteinheit ausgeführten Oscillationen verstanden, für die Arbeit, welche von dem schwingenden Körper auf der Flächeneinheit seiner Oberfläche während einer Oscillation geleistet wird, schreiben:

$$-2n\pi^2\left(\frac{ak}{r}\right)^2\sqrt{\varrho\,(\lambda+2\mu)}.$$

Diese Grösse, welche den Effect der Schwingungen an der Oberfläche misst, ist unter übrigens gleichen Umständen dem Quadrate von $\frac{a}{r}$ proportional, und somit ist letzteres als Maass der Intensität der Schwingungen zu nehmen. Mit Rücksicht hierauf ergibt sich der Satz: die Intensität der Schwingungen ist dem reciproken Quadrate der Entfernung vom Centrum und für grössere Entfernungen von demselben auch annähernd dem Quadrate der Amplitude proportional.

3. Erforschung specieller Fälle oscillatorischer Bewegungen, bei welchen eine Dilatation nicht stattfindet.

Aus der Betrachtung der Bedingungsgleichungen II) für die Hülfsfunctionen u, v, w, durch welche sich rotatorische Oscillationen bestimmen, ergibt sich, dass für jene Functionen stets solche genommen werden können, die der Bedingungsgleichung I) für die Hülfsfunction longitudinaler Schwingungen genügen, und zwar hat man nur in letzterer die Constante Ω

durch ω zu ersetzen. Indem wir daher für die erwähnten Functionen die Formen von V nehmen, die sich im vorhergehenden Abschnitte ergaben, erhalten wir ebenso viele Bewegungen, die den Elasticitätsgesetzen genügen. Auf die angegebene Weise werden die meisten der in der Folge betrachteten Bewegungen erhalten.

1. Setzt man:

$$u = 0, \quad v = c \cos \frac{2\pi}{\omega\delta} z, \quad w = 0,$$

wo $\frac{\mu}{\varrho} = \omega^2$ gesetzt ist, so entspricht dieser Annahme folgendes System von Ausschlägen, unter c eine willkürliche Constante verstanden:

$$\xi = c \sin \frac{2\pi}{\omega\delta} z \sin \frac{2\pi}{\delta} t, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Die hierdurch bestimmten stehenden Transversal-Schwingungen sind der x-Axe parallel und für alle Theilchen einer zur z-Axe senkrechten Ebene gleich. In der Richtung der z-Axe aber ändert sich die Amplitude nach dem Gesetze der Sinusfunction, deren Periode $\omega\delta$ ist. Ein mit der z-Axe paralleler Faden des Mittels schwingt wie eine gespannte Saite. Für ein Element der Oberfläche, dessen Normale mit der z-Axe den Winkel γ und mit der x-Axe den Winkel α bildet, ergeben sich folgende Componenten der anzubringenden Kraft:

$$X = \frac{2\mu c\pi}{\omega\delta} \cos \frac{2\pi}{\omega\delta} z \sin \frac{2\pi}{\delta} t \cos\gamma, \quad Y = 0,$$

$$Z = \frac{2\mu c\pi}{\omega\delta} \cos \frac{2\pi}{\omega\delta} z \sin \frac{2\pi}{\delta} t \cos\alpha.$$

Die Combination der betrachteten Schwingungen mit folgendem gleichartigen Systeme:

$$\xi = c \cos \frac{2\pi}{\omega\delta} z \cos \frac{2\pi}{\delta} t, \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0,$$

liefert eine durch folgende Gleichungen dargestellte Bewegung:

$$\xi = c \cos \frac{2\pi}{\omega\delta} (\omega t - z), \quad \eta = 0, \quad \zeta = 0.$$

Diese Gleichungen stellen fortschreitende Transversal-Schwingungen dar, die sämmtlich gleich gerichtet und geradlinig po-

larisirt sind. Die Wellen sind eben und stehen auf der z-Axe senkrecht. Ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist ω, ihre Breite $\omega\delta$. Für die Zusammensetzung solcher Schwingungen gelten dieselben Sätze, wie sie früher bei den Longitudinal-Schwingungen aufgestellt wurden.

Aus Schwingungen der hier betrachteten Art werden die Bewegungen zusammengesetzt, auf welche man die Lichtphänomene zurückführt.

2. Die Annahmen:

$$u=0, \quad v=0, \quad w=aP\left(-\frac{k^2r^2}{4}\right)+bQ\left(-\frac{k^2r^2}{4}\right),$$

sowie die anderen Annahmen:

$$\xi=0, \quad \eta=0, \quad \zeta=\left\{aP\left(-\frac{k^2r^2}{4}\right)+bQ\left(-\frac{k^2r^2}{4}\right)\right\}sin\frac{2\pi}{\delta}t,$$

wo für k wieder die Grösse $\frac{2\pi}{\omega\delta}$ zu setzen ist, und auch P und Q die denselben im vorigen Abschnitte Nr. 2 beigelegte Bedeutung behalten, führen zu stehenden Schwingungen, wobei alle Theilchen eines Cylinders, dessen Axe in die z-Axe fällt, stets in demselben Oscillationszustande sich befinden. Bei der ersten Annahme oscillirt ein solcher Cylinder um seine Axe und bei der zweiten schwingt er in der Richtung seiner Axe hin und her. Dass die zweite Annahme zulässig ist, zeigt die Substitution des Werthes für ζ in die dritte Bewegungsgleichung.

3. Man erhält durch die Annahmen:

$$u=0, \quad v=0, \quad w=-\frac{a}{r}cos\,(kr+b)$$

Ausschläge, welche durch Ausdrücke von folgender Form dargestellt werden:

$$\xi=-a\left\{\frac{ky}{r^2}sin\,R+\frac{y}{r^3}cos\,R\right\}sin\,D,$$

$$\eta=a\left\{\frac{kx}{r^2}sin\,R+\frac{x}{r^3}cos\,R\right\}sin\,D,$$

$$\zeta=0,$$

wo wieder $R=kr+b$, $D=\frac{2\pi}{\delta}t$, $k=\frac{2\pi}{\omega\delta}$ gesetzt ist.

Alle Theilchen einer um den Anfangspunkt beschriebenen Kugel befinden sich in demselben Oscillationszustande, und eine solche Kugel oscillirt um die z-Axe. Durch Verbindung der angegebenen Bewegung mit einer zweiten, der die Function

$$w = \frac{a}{r} \sin(kr + b)$$

zu Grunde liegt, und bei der an die Stelle von D der Ausdruck $\frac{\pi}{2} - D$ tritt, findet man eine Bewegung, die bei gehöriger Annahme des Zeitanfanges sich folgendermassen darstellen lässt:

$$\xi = -a \left\{ \frac{ky}{r^2} \cos F + \frac{y}{r^3} \sin F \right\},$$

$$\eta = a \left\{ \frac{kx}{r^2} \cos F + \frac{x}{r^3} \sin F \right\},$$

$$\zeta = 0,$$

wo $F = \frac{2\pi}{\delta} t - kr$ ist.

Die so gewonnene Bewegung besteht in fortschreitenden Querschwingungen; die Wellen sind sphärisch, ihre Breite ist $\omega\delta$, ihre Fortpflanzungsgeschwindigkeit ω.

Wenn die Entfernung vom Centrum der Wellen sehr gross ist im Vergleich zur Breite der Wellen, so hat man annähernd für den auf dem Strahle und der z-Axe senkrechten Ausschlag:

$$\frac{ak}{r} \cos \frac{2\pi}{\omega\delta} (\omega t - r) \sin \varphi,$$

wo φ die Neigung des Strahles gegen die z-Axe bedeutet. Also auch bei den sphärischen Wellen der Querschwingungen nimmt die Amplitude im umgekehrten Verhältnisse des Radiusvector ab, wenn letzterer sehr gross ist.

Wofern der schwingende Körper durch eine den Wellen concentrische Kugelfläche begrenzt ist, muss auf das Element der Oberfläche eine Kraft wirken, die in die Richtung des Ausschlages fällt, also eine Tangentialkraft, und für die Grösse dieser Kraft ergibt sich:

$$T = \frac{\mu a \sin \varphi}{r} \left\{ \left(k^2 - \frac{3}{r^2} \right) \sin F - \frac{3k}{r} \cos F \right\}.$$

Für die Arbeit, welche diese Kraft während einer Oscillation leistet, findet man in ähnlicher Weise wie im vorigen Abschnitte:

$$-k\mu\pi\left(\frac{ak}{r}\sin\varphi\right)^2,$$

wonach für die bei einer Oscillation geleistete Arbeit auch geschrieben werden kann:

$$-2n\pi^2\left(\frac{ak}{r}\sin\varphi\right)^2\sqrt{\varrho\mu},$$

unter n die Anzahl der in einer Secunde gemachten Schwingungen verstanden. Hiernach ist auch die Wirkung der transversalen Schwingungen bei sphärischen Wellen dem umgekehrten Quadrate der Entfernung vom Centrum unter übrigens gleichen Umständen proportional und wird annähernd in grösserer Entfernung von dem Oscillationscentrum durch das Quadrat der Amplitude gemessen.

4. Den Bedingungsgleichungen II) für die Hülfsfunctionen wird genügt, wenn man setzt:

$$u=0, \quad v=0, \quad w=\frac{a}{2}(x^2+y^2)\sin\frac{2\pi}{\omega\delta}z.$$

Man findet dann folgendes System von Ausschlägen:

$$\xi=-ay\sin\frac{2\pi}{\omega\delta}z\sin\frac{2\pi}{\delta}t, \quad \eta=ax\sin\frac{2\pi}{\omega\delta}z\sin\frac{2\pi}{\delta}t,$$
$$\zeta=0.$$

Es bestimmen aber diese Ausschläge stehende Torsionsschwingungen, wobei jede zur z-Axe senkrechte Ebene um letztere oscillirt, so dass eine solche Ebene lauter in demselben Oscillationszustande befindliche Theilchen enthält. Als Knotenflächen treten auf die Ebenen, für deren Entfernungen von der xy-Ebene man hat:

$$\ldots -3\frac{\omega\delta}{2}, \quad -2\frac{\omega\delta}{2}, \quad -\frac{\omega\delta}{2}, \quad 0, \quad \frac{\omega\delta}{2}, \quad 2\frac{\omega\delta}{2}, \quad 3\frac{\omega\delta}{2}\ldots$$

Andererseits treten Bäuche auf in den Ebenen, denen folgende Entfernungen entsprechen:

$$\ldots -5\frac{\omega\delta}{4}, \quad -3\frac{\omega\delta}{4}, \quad -\frac{\omega\delta}{4}, \quad \frac{\omega\delta}{4}, \quad 3\frac{\omega\delta}{4}, \quad 5\frac{\omega\delta}{4}\ldots$$

An einer cylindrischen Grenzfläche, deren Axe in die Torsionsaxe fällt, sind keine Kräfte anzubringen. Wird aber überdies der Körper von zwei auf der z-Axe senkrechten Grundflächen begrenzt, so muss, wenn die Bewegung permanent sein soll, an dem Elemente derselben eine Tangentialkraft wirken, für die man, unter r die Entfernung von der Torsionsaxe verstanden, findet:

$$T = -\frac{2\pi\mu ar}{\omega\delta} \cos\frac{2\pi}{\omega\delta} z \sin\frac{2\pi}{\delta} t.$$

Durch Combination stehender Torsionsschwingungen kann man eine fortschreitende Bewegung ebener Wellen erhalten, die um eine gemeinschaftliche Axe oscilliren.

IV.

Experimentelle Prüfung der Theorie der oscillatorischen Bewegungen in homogenen, isotropen Körpern.

1. Longitudinal-Schwingungen prismatischer Stäbe.

Die Gesetze, welche sich aus der Beobachtung prismatischer Stäbe, die durch Längsstreichen in Schwingungen versetzt werden, für die Knotenflächen und Bäuche ergeben haben, fallen der Hauptsache nach mit denjenigen zusammen, die theoretisch abgeleitet werden können, indem man annimmt, dass die Bewegung der Stäbe die unter III. 2. Nr. 1 betrachtete sei. Gleichwohl besteht zwischen dieser und der wirklichen Bewegung der wesentliche Unterschied, dass bei letzterer neben den Longitudinal-Schwingungen nothwendig auch eine seitliche Bewegung der Theilchen eintreten muss, da die seitliche Contraction und Dilatation nicht durch Kräfte, die an der Oberfläche wirken, aufgehoben wird. Wenn aber die Stäbe einen nur kleinen Querschnitt haben, so darf man annähernd ein von zwei unendlich nahen Querschnitten begrenztes Stück des Stabes als ein cubisches Element behandeln, d. h. man darf von der seitlichen Bewegung seiner Theilchen absehen, ferner auch die elastische Kraft sowie die Longitudinal-Schwingungen als für die verschiedenen Punkte des Querschnittes constant betrachten, zugleich aber muss man alsdann für die Grösse der elastischen Kraft den Ausdruck:

$$q\frac{d\xi}{dx}$$

setzen, wenn q den Elasticitätscoefficienten, ζ den mittleren Ausschlag des Querschnittes parallel der z-Axe bedeutet. An die Stelle der Grösse $\lambda + 2\mu$ im Obigen, welche mit dem Quotienten $\frac{N}{c}$ für eine Dehnung ohne seitliche Contraction zusammenfällt, tritt also jetzt der Werth des Quotienten $\frac{N}{c}$ für eine Dehnung, bei der die Seitenflächen keiner Kraft ausgesetzt sind. Dies angenommen, hat man also zur Darstellung der in Longitudinal-Schwingungen bestehenden Bewegungen des Stabes:

$$\xi = 0, \quad \eta = 0, \quad \zeta = c \sin \frac{2\pi}{\Omega' \delta} z \sin \frac{2\pi}{\delta} t,$$

wo jetzt zu setzen ist:

$$\Omega' = \sqrt{\frac{q}{\varrho}};$$

dabei ist q auszudrücken in der Einheit, wonach wir die Kräfte messen, also in Grammen, und ϱ bedeutet die Masse der Volumeneinheit, wofür wir also $\frac{d}{g}$ setzen müssen, unter d die Dichte oder das specifische Gewicht der Substanz, und unter $g = 980{,}88$ die Beschleunigung der Schwere verstanden.

Wenn das eine Ende des Stabes eingeklemmt ist, während das zweite Ende frei bleibt, so wird jenes eine Knotenfläche und an diesem tritt ein Bauch auf, indem nur dann die Bewegung fortdauern kann, ohne dass auf das freie Ende ein äusserer Normaldruck wirkt. In diesem Falle ist also, wenn l die Länge des Stabes ist und der Anfangspunkt in das feste Ende gelegt wird:

$$\zeta = c \sin \frac{(2i+1)\pi}{2l} z \sin \frac{2\pi}{\delta} t,$$

wo i eine positive ganze Zahl bedeutet. Man hat mithin:

$$\Omega' \delta = \frac{4l}{2i+1}.$$

Nach gehöriger Substitution ergibt sich aus letzterer Formel, unter n die Anzahl der in der Zeiteinheit stattfindenden Oscillationen verstanden:

$$n = \frac{2i+1}{4l}\sqrt{\frac{gq}{d}}.$$

Die Zahl n fällt mit der Schwingungszahl des Tones zusammen, der durch Mittheilung der oscillatorischen Bewegung an das den Stab umgebende Mittel erregt wird. Aus der letzten Formel ersieht man, dass die Schwingungszahlen der verschiedenen Töne, die der Stab erregen kann, sich wie die Zahlen 1, 3, 5 .... verhalten. Aus dem tiefsten dieser Töne, dem Grundton des Stabes, ergibt sich für den Elasticitätscoefficienten:

$$q = \frac{16 d l^2 n^2}{g}.$$

Aus einer Reihe von Versuchen, welche Wertheim an denselben Metallstäben oder Drähten vornahm, auf die sich die früher aufgeführte Tabelle bezieht, ergaben sich für die zuletzt aufgeführte Grösse die folgenden Werthe, die sich wiederum auf einen Querschnitt von einem Quadratcentimeter beziehen, und deren Einheit eine Million Gramme ist.

Metall:	Dichte:	Elasticitäts-coefficient:	Metall:	Dichte:	Elasticitäts-coefficient:
Blei . . .	11,232	215	Kupfer .	8,936	1254
Gold . .	18,035	637	Platin .	21,083	1561
Silber . .	10,304	724	Eisen . .	7,757	1993
Zink . . .	7,146	931	Gussstahl	7,719	1944

Schema eines Versuches. Ein Golddraht von 93,8^{cm} Länge, 0,211^{mm} Radius und dem specifischen Gewichte 18,035 gab, an beiden Enden eingeklemmt und durch Längsstriche in Schwingungen gesetzt, einen Grundton, dessen Schwingungszahl mit Hülfe des Sonometers zu 992,2 bestimmt wurde. Ein an beiden Enden eingeklemmter Stab zeigt dieselben Longitudinal-Schwingungen, wie wenn er in der Mitte befestigt und an beiden Enden frei ist, also auch wie ein an einem Ende eingeklemmter Stab von der halben Länge. In die obige Formel für q ist also zu setzen: $d = 18{,}035$, $l = 46{,}9$, $n = 992{,}2$, woraus sich q zu 637 Millionen Gramm ergibt.

Wie man sieht, nähern sich die aus den Longitudinal-Schwingungen abgeleiteten Werthe des Quotienten $\frac{N}{c}$ den aus den Dehnungsversuchen unmittelbar gefundenen.

Die betrachtete oscillatorische Bewegung mit stehenden Wellen lässt sich als Resultante zweier oscillatorischer Bewegungen mit fortschreitenden Wellen auffassen. Die Gleichungen der letzteren sind, wie man leicht findet, und wenn man von den Componenten ξ und η, welche verschwinden, absieht:

$$\xi_1 = \tfrac{1}{2} c \cos \frac{2\pi}{\Omega' \delta} (\Omega' t - z), \quad \xi_2 = -\tfrac{1}{2} c \cos \frac{2\pi}{\Omega' \delta} (\Omega' t + z),$$

so dass sich also, wie auch schon früher erörtert wurde, die zu der Axe des Stabes senkrechten Wellen jener zwei Bewegungen nach entgegengesetzten Richtungen, aber mit gleicher Geschwindigkeit Ω' fortpflanzen. Auch die Wellenlängen sind gleich, nämlich gleich $\Omega' \delta$. Die Grösse Ω' lässt sich hiernach als die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ebener Wellen von Longitudinal-Schwingungen oder als Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Schalles in dünnen prismatischen Stäben mit freien Seitenflächen, und zwar längs deren Axe, auffassen. Die Grösse Ω aber bedeutet nach dem Früheren die Geschwindigkeit des Schalles in einer unbegrenzten Masse oder auch in dünnen prismatischen Stäben, wofern auf deren Seitenflächen solche Druck- oder Zugkräfte wirken, wie sie der betrachteten oscillatorischen Bewegung entsprechen. Für das Verhältniss der beiden Geschwindigkeiten hat man:

$$\frac{\Omega}{\Omega'} = \sqrt{\frac{(\lambda+\mu)\ (\lambda+2\mu)}{\mu\ (3\lambda+2\mu)}},$$

so dass sich je nach den Annahmen $\lambda = \mu$ oder $\lambda = 2\mu$ die Beziehungen:

$$\Omega = \Omega' \sqrt{\tfrac{6}{5}} \quad \text{oder} \quad \Omega = \Omega' \sqrt{\tfrac{3}{2}}$$

ergeben.

Wir lassen hier eine Tabelle über die Geschwindigkeit des Schalles in prismatischen Stäben (oder Drähten) verschiedener Metalle folgen, wie sie sich aus den citirten Versuchen von Wertheim, sowie aus Versuchen Masson's (Poggend.

Annalen, Bd. CIII: Schallgeschwindigkeit in Metallen) ergeben haben. Die von Wertheim herrührenden Zahlen beziehen sich auf dieselben Metalle, welche wir früher hervorgehoben haben, und denselben ist als Einheit die nach Moll zu 332,244 Meter angesetzte Geschwindigkeit des Schalles in der Luft zu Grunde gelegt. Die Einheit für die von Masson herrührenden Data ist 333 Meter.

Metall:	Schallgeschwindigkeit nach		Metall:	Schallgeschwindigkeit nach	
	Wertheim:	Masson:		Wertheim:	Masson:
Blei	4,120	3,976	Zink . . .	10,774	11,14
Gold . . .	5,603	6,27	Kupfer . .	11,167	11,52
Kadmium .	–	7,55	Kobalt . .	–	14,23
Zinn . . .	–	7,953	Stahl . . .	14,961	14,88
Silber . . .	7,903	7,957	Nickel . .	–	14,98
Platin . . .	8,111	8,41	Eisen . . .	15,108	15,108
Palladium .	–	9,81	Aluminium	–	15,375
Messing . .	–	10,48			

Es liegt nahe, die vorhergehenden Betrachtungen auf flüssige Körper auszudehnen, die in dünnen prismatischen Röhren, in Pfeifen, zum Tönen gebracht werden. Gehen wir zu den Grundgleichungen für die Elasticitäts-Phänomene zurück, so bemerkt man, dass dieselben den flüssigen Körpern angepasst werden, wenn man μ verschwinden lässt, weil bei diesen Körpern wegen der leichten Verschiebbarkeit ihrer Theilchen keine Tangentialcomponenten der Elasticitätskraft auftreten können. Durch jene Annahme, wodurch die gedachten Gleichungen sich in die Grundgleichungen der Hydrostatik verwandeln, wird die Unabhängigkeit des Druckes von der Richtung bedingt, und geht die Grösse λ in den Quotienten q aus der cubischen Compression in den Druck über. Für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der longitudinalen Schwingungen in einer unbegrenzten Masse kommt, wenn die früheren Bezeichnungen ungeändert beibehalten werden:

$$\Omega = \sqrt{\frac{q}{d}}.$$

Es fällt ferner die Unterscheidung zwischen Ω und Ω' fort, so dass man für die Oscillationsdauer des Grundtones einer Pfeife, je nachdem sie offen oder gedeckt ist, die eine oder die andere der beiden Relationen

$$\Omega\delta = 2l, \quad \Omega\delta = 4l$$

hat. In dem ersten Falle nämlich wird sowohl an der Lippe, wie auch an dem offenen Ende ein Bauch auftreten müssen, während in dem zweiten Falle die Basis der Pfeife eine Knotenfläche sein muss. Obige Resultate lassen sich bei gasförmigen Flüssigkeiten in befriedigende Uebereinstimmung mit den Ergebnissen des Versuches bringen, wie jetzt gezeigt werden soll.

Bei einem Gase, welches unter einem Drucke von h Centimetern Quecksilber steht, ist, dem Mariotte'schen Gesetze zufolge, wenn die Dichtigkeit des Quecksilbers durch D bezeichnet wird:

$$q = hD, \quad \Omega = \sqrt{gh\frac{D}{d}}.$$

In dem Ausdrucke für q ist auf einen bei Gasen ins Gewicht fallenden Umstand keine Rücksicht genommen, nämlich die Wärmeentwickelung während einer Compression und Wärmebindung während einer Dilatation. Diese bewirkt, dass während der Volumenänderung demselben Drucke oder Zuge eine geringere Compressions- oder Dilatationsgrösse entspricht, als das Mariotte'sche Gesetz angibt. Um ein Gasvolum, dessen Gewicht 1 ist und das unter dem Drucke P steht, um 1^0 C. zu erwärmen, während es sich dabei ausdehnen kann, sind c Wärmeeinheiten erforderlich, wenn c die specifische Wärme des Gases bei constantem Drucke ist. Wird aber demselben Gase, während es um 1^0 C. erwärmt wird, nicht gestattet, sich auszudehnen, so wird es eines kleineren Wärmequantums c' bedürfen, unter c' die specifische Wärme des Gases bei constantem Volumen verstanden. Die der Erwärmung entsprechende Ausdehnung im ersten Falle oder der Ausdehnungscoefficient des Gases sei α. Alsdann schliessen wir, dass der Compression α eine Entwickelung von $c - c'$ Wärmeeinheiten entspricht. Diese Wärme erhöht die Temperatur des Gases, wenn sie

rascher mitgetheilt wird, als der Druck nachgeben kann, um $\frac{c-c'}{c'}$ Grade und vermehrt somit den Druck um $\alpha\left(\frac{c}{c'}-1\right)P$. Wenn folglich die Compression in sehr kurzer Zeit von statten geht, so entspricht der Aenderung α des Volumens dem Mariotte'schen Gesetze zufolge die Aenderung αP des Druckes, und überdies wegen der Wärmeentwickelung die Aenderung $\alpha\left(\frac{c}{c'}-1\right)P$, im Ganzen also die Aenderung $\alpha\frac{c}{c'}P$. Mit Rücksicht hierauf haben wir also zu setzen:

$$q = hD\frac{c}{c'}, \quad \Omega = \sqrt{hg\frac{D}{d}\cdot\frac{c}{c'}}.$$

Für atmosphärische Luft ist nach directen Versuchen von Gay-Lussac und Welter:

$$\frac{c}{c'} = 1{,}372.$$

Ferner hat man für die Temperatur 0^0, das Niveau des Meeres und die geographische Breite von 45^0:

$$\frac{D}{d} = 10517;$$

(Regnault, Détermination du poids du litre d'air; Mémoires de l'institut de France, tome XXI).

Setzt man endlich $g = 980{,}88$, so ergibt sich für die erwähnte Temperatur und den Barometerstand $h = 76^{cm}$ mittelst der obigen Formel:

$$\Omega = 327{,}97 \text{ Meter},$$

was von dem Ergebniss directer Versuche über die Schallgeschwindigkeit um weniger als anderthalb Procent abweicht. Es kann diese Abweichung nicht befremden, wenn man die beträchtlichen Unterschiede in den Werthen für $\frac{c}{c'}$ bedenkt, wie sie von verschiedenen Forschern gefunden wurden. Nimmt man für Ω den von Moll gefundenen Werth, für den wir als Mittel aus verschiedenen Berechnungen der Beobachtungsresultate 332,2 Meter nehmen können, so liefert obige Gleichung umgekehrt für $\frac{c}{c'}$ den Werth 1,41, was auch durch die Resultate der mechanischen Wärmetheorie bestätigt wird.

Die oscillatorische Bewegung eines Gases in einer tönenden Pfeife muss nicht unerheblich von der regelmässigen Bewegung abweichen, für welche die oben mitgetheilten Formeln gelten, selbst wenn der Stoff der Pfeife nur wenig biegsam ist und als starr betrachtet werden darf. Sowohl in der Gegend der Lippe, wie auch, wenn die Pfeife offen ist, in der Gegend des offenen Endes werden nothwendig merkliche Perturbationen der regelmässigen Bewegung eintreten. Hiernach wird es folglich nicht gestattet sein, die Entfernung der Lippe von dem offenen Ende als die Länge der Luftsäule zu betrachten, die dem Tone der Pfeife entspricht. Nach den Versuchen von Wertheim *(Mémoire sur la vitesse du son dans les liquides; Annales de Chimie et de Physique, 3me série, tome XXII)* scheint es jedoch, als ob bei Pfeifen von demselben Durchmesser und für dieselbe Stärke des Windes der Unterschied zwischen der theoretischen und empirischen Länge merklich constant ist. Bezeichnen wir nämlich die Länge einer offenen Pfeife, d. i. die Entfernung der Lippe von dem offenen Ende, durch L, die Geschwindigkeit des Schalles wie vorher durch Ω und die Anzahl der Schwingungen, welche dem Grundtone entspricht, durch n, so hat man, unter ΔL die Correction verstanden, die an der empirischen Länge anzubringen ist, um die theoretische Länge zu erhalten:

$$\Omega = 2n(L + \Delta L).$$

Nun bestimmte Wertheim, um eine seiner Versuchsreihen hervorzuheben, die derselben Windstärke entsprechenden Grundtöne bei einer Pfeife aus Metall, deren ursprüngliche Länge mittelst zweier Ansätze verdoppelt und verdreifacht werden konnte. Die Schwingungszahlen wurden mittelst eines Sonometers bestimmt, dessen Grundton bekannt war. Die Temperatur betrug 8° C. Es ergaben sich folgende Resultate:

L_1	$2n_1$	L_2	$2n_2$	L_3	$2n_3$
33,25	847,7	66,60	459,6	100,05	315,3

Wenn man unter Zugrundelegung obiger Werthe aus der Relation:

$$n_1 (L_1 + \Delta L) = n_2 (L_2 + \Delta L) = n_3 (L_3 + \Delta L)$$

die drei Werthe von ΔL berechnet, die sich durch Combination je zweier der Versuche bestimmen, so findet man:

6,24, 6,31, 6,42.

Corrigirt man jetzt mit dem Mittel dieser Werthe die Längen der Pfeifen und bestimmt die entsprechenden Werthe der Geschwindigkeit Ω, so findet man bezüglich in Metern:

335,43, 335,14, 335,38.

Da aber ferner zwischen den Geschwindigkeiten Ω_0 und Ω_t bei 0^0 und t^0, wie aus dem Obigen folgt, die Relation

$$\Omega_0 = \frac{\Omega_t}{\sqrt{1 + 0{,}003665\, t}}$$

besteht, so berechnet sich aus dem Mittel der für 8^0 gefundenen Werthe von Ω der Werth dieser Grösse für 0^0 und denselben Barometerstand, wie er bei dem Versuche stattfand, zu

330,51 Meter.

Wir theilen hier auch noch einige der Resultate mit, zu welchen Dulong *(Recherches sur la chaleur spécifique des fluides élastiques; Annales de Chimie et de Physique, tome XLI)* bei seinen Versuchen, die Schallgeschwindigkeit in verschiedenen Gasen mit Hülfe von Pfeifen zu bestimmen, gelangt ist. Derselbe ermittelte den Grundton einer und derselben offenen Pfeife, während sie der Reihe nach mittelst verschiedener Gase und bei gleichem Drucke angeblasen wurde. Aus den Schwingungszahlen der so beobachteten Töne konnte alsdann mit Berücksichtigung der Temperatur auf das Verhältniss der Schallgeschwindigkeit geschlossen werden, da durch directe Versuche nachgewiesen war, dass die Knotenfläche bei den verschiedenen Gasen an derselben Stelle des Pfeifenrohres auftrat. Die zweite Columne der folgenden Tafel enthält die Schallgeschwindigkeit Ω in einigen Gasen für die Temperatur von 0^0 und in Metern ausgedrückt, wie sie sich aus den Beobachtungen Dulong's berechnet, wenn die Geschwindigkeit in der Luft bei 0^0 und 76^{cm} Druck zu 333 Meter und für den Ausdehnungscoefficienten zum Behufe der Reduction der Temperaturen der der atmosphärischen Luft angenommen wird, was ohne merklichen Fehler gestattet ist. Die Tabelle enthält ferner noch

die Dichtigkeiten δ der untersuchten Gase, die der atmosphärischen Luft gleich Eins gesetzt, nach Regnault *(Recherches sur les chaleurs spécifiques des fluides élastiques; Compt. rend., tome XXXVI)*. Endlich sind die Werthe des Verhältnisses $c : c'$ der beiden specifischen Wärmen aufgeführt, wie sie sich mittelst der theoretischen Formel aus den beobachteten Schallgeschwindigkeiten berechnen.

Gas:	Ω	δ	$c : c'$
Atmosphärische Luft	333,00	1,0000	1,414
Sauerstoff	316,54	1,1056	1,413
Wasserstoff.	1263,36	0,0692	1,409
Kohlenoxyd	338,23	0,9674	1,412

Die Formel für die Schallgeschwindigkeit in einer unbegrenzten flüssigen Masse lässt sich auch für eine tropfbare Flüssigkeit, das Wasser, verificiren. Wir besitzen nämlich eine Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in diesem Körper durch Versuche, welche Colladon und Sturm am Genfer See anstellten. Dieselben bestimmten die gedachte Geschwindigkeit für die Temperatur 9° zu 1435 Metern. Andererseits fand Grassi *(Note sur la compressibilité des liquides; Compt. rend., tome XXVII)* für die Compressibilität des Wassers bei 0° und 10°,8 bezüglich die Werthe 0,0000506 und 0,0000487, wenn der Druck einer Atmosphäre gleichkommt. Für 9° ist somit die Compressibilität gleich 0,000049 und folglich

$$\Omega = \sqrt{\frac{980{,}88 \,.\, 76 \,.\, 13{,}593}{49}} \,.\, 1000^{cm} = 1438 \text{ Meter.}$$

Die Bestimmung der Schallgeschwindigkeit in tropfbaren Flüssigkeiten mittelst Pfeifen, die in der betreffenden Flüssigkeit in ähnlicher Weise, wie die gewöhnlichen Pfeifen in der Luft, zum Tönen gebracht werden, hat zuerst Wertheim versucht; die Ergebnisse der Versuche hat derselbe in dem zuletzt citirten Memoire veröffentlicht. Eine Zusammenstellung seiner Resultate ist in der folgenden Tabelle enthalten; es bedeutet wie früher L die Länge der offenen Pfeifen, n die Schwingungszahl des Grundtones, so dass die Grösse $2nL : 100$ die Schallgeschwindigkeit in Metern darstellen würde, wenn

die Verhältnisse bei den tropfbaren Flüssigkeiten dieselben wären, wie bei den gasförmigen.

Flüssigkeit:	Temperatur:	Dichte:	$2nL:100$
Seinewasser	15,0	0,9996	1173,4
„	30,0	0,9963	1250,9
„	40,0	0,9931	1324,8
„	50,0	0,9893	1349,0
„	60,0	0,9841	1408,2
Künstliches Meerwasser	20,0	1,0264	1187,0
Lösung von Chlornatrium	18,0	1,1920	1275,0
„ „ schwefelsaurem Natron	20,0	1,1089	1245,0
„ „ kohlensaurem Natron .	22,2	1,1828	1301,8
„ „ salpetersaurem Natron	20,9	1,2066	1363,5
„ „ Chlorcalcium	22,5	1,4322	1616,3
Gewöhnlicher Alkohol von 36° . .	20,0	0,8362	1049,9
Absoluter Alkohol	23,0	0,7960	947,0
Terpentinöl	24,0	0,8622	989,8
Schwefeläther	0,0	0,7529	946,3

Wie wir aus der obigen Tabelle ersehen, bleibt der Ausdruck $2nL:100$ beim Wasser um Erhebliches hinter dem direct beobachteten Werthe der Schallgeschwindigkeit in dieser Flüssigkeit zurück. Wertheim glaubt, es sei diese Differenz durch die Annahme zu heben, dass bei den Flüssigkeiten eben sowohl, wie bei den festen Körpern, zwischen den Grössen Ω und Ω' unterschieden werden müsse. Um die Schallgeschwindigkeit Ω der Flüssigkeiten für eine unbegrenzte Masse zu erhalten, müssen die aus den Versuchen mit Pfeifen abgeleiteten Werthe von Ω' mit der Grösse

$$\sqrt{\frac{(\lambda+\mu)(\lambda+2\mu)}{\mu(3\lambda+2\mu)}}$$

multiplicirt werden, für welche letztere derselbe Forscher in Uebereinstimmung mit seiner Annahme $\lambda = 2\mu$ den Werth $\sqrt{\frac{3}{2}}$ setzt.

2. Transversalschwingungen eines prismatischen Stabes.

Die Elasticitätskraft, welche durch Biegung eines an einem Ende eingeklemmten Stabes mit centrischem Querschnitte auf

einem Schnitte entwickelt wird, der zur gebogenen Axe des Stabes, der elastischen Curve, senkrecht geführt ist, besteht, wenn die Längsflächen keinen Druck erleiden, aus einer Kraft T, die im Mittelpunkte des Schnittes angreift und in der Biegungsebene liegt, und einem Gegenpaare G, das in die Biegungsebene fällt. Das Moment dieses Gegenpaares beträgt bei dem parallelepipedischen und cylindrischen Stabe bezüglich nach II. 4:

$$-\frac{q b^3 c}{12 R} \text{ und } -\frac{q r^4 \pi}{4 R},$$

wenn, wie früher, R den Krümmungshalbmesser der elastischen Curve an der betrachteten Stelle, r den Halbmesser des cylindrischen Stabes, b und c resp. die zur Biegungsebene parallele und die zur Biegungsebene senkrechte Kante des parallelepipedischen Stabes bedeuten. Die Länge des Stabes werde durch l bezeichnet. Die Coordinatenaxen sollen dieselben bleiben, wie oben (II, 4).

Es mögen unter den Kräften, die auf den gebogenen Stab einwirken, keine vorhanden sein, die die Seitenflächen angreifen. Es werde ferner der Querschnitt durch ω, die Componenten der Kraft T durch ωX, ωY, die Componenten der Kraft, die auf die einzelnen Theilchen einwirkt, solche auf die Masseneinheit bezogen, durch X_i, Y_i bezeichnet. Durch zwei zur gebogenen Mittelebene senkrechte unendlich nahe Querschnitte, die den Bogen s und $s+ds$ entsprechen, wird ein Element des Prismas bestimmt, an dem folgende Kräfte thätig sind. An der einen Endfläche wirkt das Gegenpaar G_s, in der Mitte derselben wirkt die Kraft mit den Componenten ωX_s, ωY_s. An der zweiten Endfläche wirkt das Gegenpaar $-G_{s+ds}$, und im Mittelpunkte derselben wirken die Componenten $-\omega X_{s+ds}$, $-\omega Y_{s+ds}$. In dem Schwerpunkte des körperlichen Elementes endlich lassen sich die an den einzelnen Theilchen wirkenden Kräfte vereinigen und diese liefern die Componenten $\varrho\omega X_i ds$, $\varrho\omega Y_i ds$. Da nun das Element im Gleichgewichte sein muss, wenn man es frei macht, zugleich aber den Zusammenhang mit den übrigen Theilen des Prismas durch die erwähnten Elasticitätskräfte ersetzt, so hat man:

$$\varrho X_i - \frac{dX}{ds} = 0, \qquad \varrho Y_i - \frac{dY}{ds} = 0,$$

$$-\frac{dG}{ds} - \omega \frac{d(Yx - Xy)}{ds} + \varrho\omega (Y_i x - X_i y) = 0.$$

Für die beiden ersten Gleichungen kann man, wenn, wie unterstellt werden soll, an dem zweiten Ende des Stabes keine Zug- oder Druckkraft wirkt, setzen:

$$X = -\varrho \int_s^l X_i ds, \qquad Y = -\varrho \int_s^l Y_i ds,$$

und mit Rücksicht auf die beiden ersten Gleichungen kann man für die dritte Gleichung schreiben:

$$\frac{dG}{ds} + \omega \left(Y \frac{dx}{ds} - X \frac{dy}{ds} \right) = 0.$$

Wir beschränken uns hier auf den Fall, wo die Transversal-Schwingungen des Stabes sehr kleine Amplituden haben und an dem Stabe keine äusseren Kräfte wirken. Die verlorenen Kräfte sind dann:

$$X_i = 0, \qquad Y_i = -\frac{d^2\eta}{dt^2},$$

wenn η den dem Punkte mit der Abscisse x entsprechenden Ausschlag der Axe des Stabes bedeutet. Es ist also den oben gefundenen Gleichungen zufolge, da man noch den Bogen s durch die Abscisse x ersetzen kann:

$$X = 0; \qquad Y = \varrho \int_x^l \frac{d^2\eta}{dt^2} dx; \qquad \frac{dG}{dx} + \omega Y = 0.$$

Die zwei ersten Gleichungen bestimmen die Elasticitätskraft, die letztere liefert die Bewegungsgleichung. Durch Differentiation dieser Gleichungen findet man, wenn für G sein Werth eingesetzt und zugleich das Quadrat von $\frac{d\eta}{dx}$ vernachlässigt wird, als Bewegungsgleichung folgende:

$$m \frac{d^4\eta}{dx^4} + \varrho \frac{d^2\eta}{dt^2} = 0,$$

wo für m bei dem parallelepipedischen Stabe $\frac{qb^2}{12}$ und bei einem cylindrischen Stabe $\frac{qr^2}{4}$ zu setzen ist.

Nehmen wir, um bloss die einfache Bewegung des Stabes zu finden:

$$\eta = \mathfrak{y} \sin \frac{2\pi}{\delta} t,$$

so erhält man zur Bestimmung von $\mathfrak{y}$:

$$m \frac{d^4\mathfrak{y}}{dx^4} = \varrho \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \mathfrak{y}.$$

Die Integration dieser linearen Differentialgleichung vierter Ordnung liefert:

$$\mathfrak{y} = C_1 e^{k_1 x} + C_2 e^{k_2 x} + C_3 e^{k_3 x} + C_4 e^{k_4 x},$$

wo k_1, k_2 u. s. w. die verschiedenen Werthe von $\sqrt[4]{\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \frac{\varrho}{m}}$ sind. Bezeichnen wir den absoluten Werth dieser Wurzelgrösse durch k, so können wir setzen:

$$\mathfrak{y} = A e^{kx} + A' e^{-kx} + B \sin kx + B' \cos kx.$$

Die Verhältnisse der vier Integrations-Constanten bestimmen sich durch die Bedingung, dass für $x = 0$ sowohl $\mathfrak{y}$, wie auch $\frac{d\mathfrak{y}}{dx}$ verschwindet, und ferner dass für $x = l$ das Gegenpaar G und Y oder $\frac{dG}{dx}$ zu jeder Zeit verschwindet, wonach für jene Abscisse $\frac{d^2\eta}{dx^2}$ und $\frac{d^3\eta}{dx^3}$ verschwinden müssen. Den beiden ersten Bedingungen wird genügt, wenn man setzt:

$$\mathfrak{y} = A (e^{kx} - \sin kx - \cos kx) + A' (e^{-kx} + \sin kx - \cos kx),$$

und damit die beiden letzten Bedingungen erfüllt werden, muss sein:

$$\frac{A}{A'} = -\frac{e^{-kl} - \sin kl + \cos kl}{e^{kl} + \sin kl + \cos kl} = \frac{e^{-kl} + \sin kl + \cos kl}{e^{kl} - \sin kl + \cos kl}.$$

Hieraus findet man die Abhängigkeit zwischen der Oscillationsdauer und den Constanten des Prismas durch folgende Gleichung näher bestimmt:

$$2 + \cos \varphi \, (e^{\varphi} + e^{-\varphi}) = 0,$$

in welcher zu setzen ist:

$$\varphi = kl = l\sqrt[4]{\left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \frac{\varrho}{m}}.$$

Für die Werthe von φ, welche der vorstehenden transcendenten Bedingungsgleichung genügen, findet man die Zahlen:

$$\frac{\pi}{2} + 0{,}30431, \quad \frac{3\pi}{2} - 0{,}01830 \text{ u. s. w.}$$

Mit Ausnahme des ersten kommen dieselben den ungeraden Vielfachen von $\frac{\pi}{2}$ sehr nahe. Für die erste, dem Grundtone des Prismas entsprechende Oscillationsdauer hat man hiernach:

$$\frac{2\pi}{\delta} = \frac{(1{,}8751)^2}{l^2}\sqrt{\frac{m}{\varrho}}.$$

Durch Substitution des Werthes von m ergibt sich hieraus, wenn statt ϱ wieder gesetzt wird $\frac{d}{g}$, unter d das specifische Gewicht verstanden, für die Schwingungszahl des Grundtones bei einem Prisma mit rechteckigem Querschnitte:

$$n = 0{,}1615\,\frac{b}{l^2}\sqrt{\frac{gq}{d}},$$

und bei einem cylindrischen Stabe:

$$n = 0{,}2798\,\frac{r}{l^2}\sqrt{\frac{gq}{d}}.$$

Durch Vergleichung der letzten Formel mit der für Longitudinal-Schwingungen findet man, wenn n_q, n_l die Schwingungszahlen des Grundtones bei Quer- und Längsschwingungen desselben cylindrischen Stabes vom Radius r und der Länge l sind:

$$\frac{n_q}{n_l} = 1{,}1192\,\frac{r}{l}.$$

Von den Versuchen, welche die im Obigen gewonnenen Resultate bestätigen, erwähnen wir die von Wertheim. Derselbe fand für den Coefficienten der zuletzt aufgeführten Formel beim Gussstahl 1,12368 und beim Messing 1,11948. Er bestimmte ferner mittelst der für den cylindrischen Stab aufgeführten Formel den Werth von q unter Anderem für die bereits früher aufgeführten Metalle. Aus jener Formel folgt nämlich:

$$q = \frac{l^4 n^2 d}{(0{,}2798)^2 r^2 g}.$$

Ein Theil der Ergebnisse seiner hierauf bezüglichen Versuche ist in der folgenden Tabelle zusammengestellt; die Einheit ist wieder eine Million Gramme.

Metall:	Dichte:	Elasticitäts-coefficient:	Metall:	Dichte:	Elasticitäts-coefficient:
Blei . . .	11,232	185	Kupfer .	8,936	1183
Gold . .	18,035	599	Platin . .	21,083	1536
Silber . .	10,304	753	Eisen . .	7,757	1941
Zink . . .	7,146	942	Gussstahl	7,719	1881
Palladium	11,225	1128			

Wir lassen auch noch das Schema eines Versuches über Querschwingungen folgen. Die Länge des in Querschwingungen versetzten, an dem einen Ende eingeklemmten Stahlstabes betrug 50 Centimeter, sein Radius 1,507 Millimeter, seine Dichte 7,7188. Die Schwingungszahl des Stabes wurde mit Hülfe einer rotirenden Scheibe bestimmt, die mit Lampenruss überzogen war, auf der eine am freien Ende des Stabes angebrachte leichte Spitze, während die Scheibe rotirte und das Ende des Stabes in der Richtung nach dem Mittelpunkte hin sich bewegte, eine aus- und eingebogene Linie um das Centrum herumzeichnete. Eine eben solche Linie wurde gleichzeitig von einer ebenfalls mit einer leichten Spitze versehenen Stimmgabel gezeichnet, deren Schwingungszahl mittelst einer Sirene bestimmt wurde. Indem die Anzahl der in gleichen Zeiten von dem Stabe und der Stimmgabel gemachten Ein- und Ausbuchtungen verglichen wurden, ergab sich die Schwingungszahl des ersteren gleich 8,2457. Hiernach ist zu setzen: $l=50$, $r=0{,}1507$, $d=7{,}7188$, $n=8{,}2457$, woraus sich der Elasticitätscoefficient zu 1881 berechnet.

Es mögen jetzt noch die Werthe für die Geschwindigkeiten der Longitudinal-Schwingungen oder der Schallgeschwindigkeiten in dünnen prismatischen Stäben zusammengestellt werden, wie sie sich mittelst der Formel:

$$\Omega' = \sqrt{\frac{gq}{d}}$$

aus den drei Reihen der mitgetheilten, von Wertheim bestimmten Elasticitätscoefficienten berechnen. Die Einheit ist

die Geschwindigkeit des Schalles in freier Luft, welche nach den Versuchen von Moll zu 332,244 Metern angenommen ist.

Metall:	$\sqrt{\frac{gq}{d}}$ berechnet aus den			Metall:	$\sqrt{\frac{gq}{d}}$ berechnet aus den		
	Dehnungsversuchen.	Longitudinal-Schwingungen.	Transversal-Schwingungen.		Dehnungsversuchen.	Longitudinal-Schwingungen.	Transversal-Schwingungen.
Blei . . .	3,697	4,120	3,841	Kupfer .	10,703	11,167	10,847
Gold . .	5,245	5,603	5,432	Platin . .	8,087	8,111	8,045
Silber . .	7,847	7,903	8,060	Eisen . .	15,433	15,108	14,913
Zink . .	10,591	10,774	10,823	Gussstahl	15,006	14,961	14,716
Palladium	8,803	—	9,450				

3. Torsionsschwingungen eines prismatischen Stabes.

Wenn es gestattet ist, die Gesetze oscillatorischer Torsionsschwingungen, welche wir im Obigen kennen gelernt haben, auf die Torsionsschwingungen eines cylindrischen Stabes zu übertragen, der an einem Ende eingeklemmt ist, so hat man, wenn die z-Axe in die Axe des Stabes und der Coordinatenanfangspunkt in die befestigte Endfläche gelegt wird:

$$\xi = -cy \sin\frac{2\pi}{\omega\delta} z \sin\frac{2\pi}{\delta} t, \quad \eta = cx \sin\frac{2\pi}{\omega\delta} z \sin\frac{2\pi}{\delta} t, \quad \zeta = 0.$$

Ist das zweite Ende des Stabes frei, so tritt an demselben ein Bauch auf, und somit hat man, wenn l die Länge des Stabes ist:

$$\omega\delta = \frac{4l}{2i+1}.$$

Es ergibt sich hieraus für die der grössten Oscillationsdauer entsprechende Schwingungszahl, also die Schwingungszahl des Grundtones:

$$n = \frac{\omega}{4l},$$

oder:

$$n = \frac{1}{4l}\sqrt{\frac{\mu}{\varrho}}.$$

Da man ferner für den Elasticitätscoefficienten q bei einer Dilatation ohne Seitendruck zu setzen hat:

$$q = \frac{3\lambda + 2\mu}{1 + \frac{\lambda}{\mu}},$$

so erhalten wir, wenn wir die Annahme $\lambda = \mu$ machen:

$$n = \frac{1}{4l}\sqrt{\frac{q}{\varrho}} \cdot \sqrt{\frac{2}{5}}.$$

Nehmen wir dagegen nach Wertheim $\lambda = 2\mu$, so kommt:

$$n = \frac{1}{4l}\sqrt{\frac{q}{\varrho}} \cdot \sqrt{\frac{3}{8}}.$$

Bezeichnen wir also die Schwingungszahl des Grundtones bei Longitudinal-Schwingungen durch n_l, bei Torsionsschwingungen durch n_t, so hat man für den an dem einen Ende befestigten und am anderen Ende freien cylindrischen Stab je nach der einen oder anderen Annahme über das Verhältniss zwischen λ und μ:

$$\frac{n_l}{n_t} = \sqrt{\tfrac{5}{2}} = 1{,}5811 \text{ oder } \frac{n_l}{n_t} = \sqrt{\tfrac{8}{3}} = 1{,}6330.$$

Dasselbe Verhältniss bestimmte aus der Beobachtung Chladni zu 1,5 (*Poisson, Traité de mécan.*), Savart zu 1,6668 (*De Saint-Venant, Extrait d'un mémoire sur les vibrations tournantes des verges élastiques; Compt. rend., tome XXVIII*), Wertheim zu 1,6309 (*Note sur la torsion des verges homogènes; Annales de Chimie et de Physique, 3me série, tome XXV*).

Bei den Torsionsschwingungen prismatischer Stäbe treten neben den rotatorischen Verschiebungen um eine Axe nothwendig auch noch andere auf, deren analytische Bestimmung im Allgemeinen mit grossen Schwierigkeiten verknüpft sein wird. Wenn von diesen Verschiebungen nun auch annähernd bei einem Kreiscylinder abgesehen werden kann, so ist dies doch bei einem Stabe mit einem nicht kreisförmigen, aber centrischen Querschnitte nicht mehr zulässig. Um die wichtigsten Daten für diesen Fall wenigstens annähernd zu erhalten, verfahren wir in ähnlicher Weise, wie in den schon abgehandelten Fällen. Es werde für einen Querschnitt mit der Coordinate z der Winkel, welchen der auf der z-Axe des Prismas senkrechte Radiusvector eines Theilchens mit der ursprünglichen Lage des Strahles bildet, durch $f(z, t)$ bezeichnet; als-

dann ist $\frac{df}{dz}$ die Grösse der Torsion (d. i. der auf die Längeneinheit bezogene Torsionswinkel) in dem fraglichen Querschnitte. Für das Moment der auf dem Querschnitte entwickelten Elasticitätskraft hat man dann $G\frac{df}{dz}$, wenn G das der Torsion Eins entsprechende Moment für den Fall ist, wo keine Kräfte auf die Seiten des Prismas wirken.

Legen wir einen zweiten Querschnitt mit der Coordinate $z+dz$ durch das Prisma, so hat man als Torsionsmoment für diesen:

$$G\left(\frac{df}{dz}+\frac{d^2f}{dz^2}dz\right).$$

Andererseits setzen sich die verlorenen Kräfte der durch die beiden Querschnitte bestimmten Scheibe zu dem Gegenpaare:

$$-\varrho\frac{d^2f}{dt^2}\int r^2\,d\omega\,dz$$

zusammen, wenn $d\omega$ das Element eines Querschnittes bedeutet. Ersetzen wir nun die Wirkung der an der Scheibe anliegenden Theile des Prismas durch die Kräftepaare:

$$G\left(\frac{df}{dz}+\frac{d^2f}{dz^2}dz\right) \text{ und } -G\frac{df}{dz},$$

so halten sich sämmtliche Kräfte an der jetzt freien Scheibe das Gleichgewicht, so dass man, unter J das Trägheitsmoment des Querschnittes verstanden, hat:

$$G\frac{d^2f}{dz^2}=\varrho J\frac{d^2f}{dt^2}.$$

Hieraus folgt bei zweckmässiger Wahl des Anfangspunktes und der Zeit für den Fall der einfachen Bewegung:

$$f=c\sin\frac{2\pi}{\omega'\delta}z\sin\frac{2\pi}{\delta}t,$$

wo zu setzen ist:

$$\omega'=\sqrt{\frac{G}{\varrho J}}.$$

Der Ausschlag eines Theilchens, dessen Entfernung von der z-Axe gleich r ist, stellt sich dar durch rf, und somit ergeben sich folgende Gleichungen für die in Rede stehende Bewegung:

$$\xi = -cy \sin \frac{2\pi}{\omega' \delta} z \sin \frac{2\pi}{\delta} t,$$

$$\eta = cx \sin \frac{2\pi}{\omega' \delta} z \sin \frac{2\pi}{\delta} t,$$

$$\zeta = 0.$$

Wenden wir diese Formeln auf einen an einem Ende eingeklemmten Stab mit quadratischem Querschnitte an, der durch tangentiale, am zweiten freien Ende wirkende Kräfte in Torsionsschwingungen versetzt wird. Die früheren Gleichungen stellen die Bewegung des Stabes dar, wofern der Coordinaten-Anfangspunkt in der Mitte der eingeklemmten Endfläche liegt, und, da am freien Ende ein Bauch auftritt, gesetzt wird:

$$\omega' \delta = \frac{4l}{2i+1},$$

unter l die Länge des Stabes verstanden. Für die Schwingungszahl n des Grundtones hat man also:

$$n = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{G}{\varrho J}}.$$

Es ist aber dem Früheren zufolge, wenn die Seite des Querschnittes a ist:

$$G = 0{,}1405\, a^4 \mu, \quad J = \frac{a^4}{6}.$$

Für das Verhältniss der Schwingungszahlen n_l und n_t bei dem Grundton der Longitudinal- und Torsionsschwingungen eines an einem Ende eingeklemmten quadratischen Stabes ergibt sich aus Obigem bei der Annahme $\lambda = \mu$ oder $q = \frac{5}{2}\mu$:

$$\frac{n_l}{n_t} = 1{,}7221.$$

Bei der Annahme $\lambda = 2\mu$ oder $q = \frac{8}{3}\mu$ ergäbe sich:

$$\frac{n_l}{n_t} = 1{,}7785.$$

Aus den Beobachtungen fand Wertheim für das letzte Verhältniss beim Eisen die Zahl 1,6919, bei gewöhnlichem Glas 1,6863, bei Krystallglas 1,6846 (*De Saint-Venant, Extrait d'un mémoire sur les vibrations tournantes des verges élastiques; Compt. rend., tome XXVIII).*

ZWEITER THEIL.

THEORIE DER CAPILLARITÄT.

I.

Einleitende Bemerkungen. Bedingung für das Gleichgewicht eines Systemes, welches aus einem festen und einem tropfbar flüssigen Körper besteht.

Die Ausdrücke, welche im ersten Theile für die Elasticitätskraft gefunden wurden, die bei der Deformation eines festen Körpers entwickelt wird, müssen, in ihrer allgemeinsten Form genommen, auch für eine tropfbar flüssige Masse gelten, die unter der Einwirkung eines Kräftesystemes sich im Gleichgewichte befindet, wofern über die Constitution der flüssigen Körper solche Unterstellungen gemacht werden, die als besonderer Fall der auf feste Körper bezüglichen Hypothesen betrachtet werden dürfen. Insbesondere muss es also gestattet sein, die Flüssigkeit als bis zur Oberfläche homogen zu betrachten und von den Vorgängen abzusehen, welche in Folge der Molecularkräfte eintreten, die bei der Berührung der Flüssigkeit mit den sie umgebenden Körpern auftreten. Da ferner das Wesen des flüssigen Zustandes auf der leichten Verschiebbarkeit der Theilchen beruht, so wird, wenn diese eine vollkommene ist, die in den Ausdrücken der Elasticitätskraft auftretende Constante μ gleich Null zu setzen sein, da nur unter dieser Annahme die Tangentialkräfte T verschwinden, die bei absoluter Verschiebbarkeit nicht auftreten können. Dies unterstellt, erhalten wir unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen, und indem wir noch setzen:

$$\lambda\theta = p,$$

folgende Gleichgewichtsgleichungen und Ausdrücke für die Elasticitätskräfte:

$$N_x = N_y = N_z = \lambda\theta = p, \qquad T_x = T_y = T_z = 0,$$

$$\frac{dp}{dx} + \varrho X_i = \frac{dp}{dy} + \varrho Y_i = \frac{dp}{dz} + \varrho Z_i = 0.$$

Diese Gleichungen sind als Repräsentanten der hydrostatischen Phänomene zu betrachten. Die Grösse p, welche in denselben auftritt, ist der sogenannte hydrostatische Druck, d. h. die auf die Flächeneinheit bezogene Zug- oder Druckkraft, durch welche die Wirkung der Flüssigkeit auf ein cubisches Element derselben ersetzt werden kann. Die von der Natur der Flüssigkeit abhängige Constante λ kommt dem Quotienten aus der cubischen Compression in den Druck bei einer allseitig gleich stark gedrückten, sonst aber freien Flüssigkeit gleich.

Bekanntlich treten bei den Flüssigkeiten gewisse Abweichungen von den durch die vorhergehenden Gleichungen formulirten Gesetzen ein, die man unter dem Namen der Capillaritätsphänomene zusammenfasst. Es haben dieselben ihren Grund in der Wirkung der Molecularkräfte, die zwischen den Theilchen der Flüssigkeit, sowie zwischen den festen und flüssigen Körpern thätig sind. Um einen Uebergang zu den Variationsformeln zu finden, durch welche die Capillaritätsphänomene dargestellt werden, wollen wir ein System betrachten, das aus einer Flüssigkeit und einem starren Körper besteht, und auf dasselbe das Princip der virtuellen Geschwindigkeiten in Anwendung bringen. Es mögen auf die cubischen Elemente der Flüssigkeit, deren Dichte ϱ sei, Kräfte wirken, die, auf die Masseneinheit bezogen, durch P_i dargestellt seien; auf die freie Oberfläche O der Flüssigkeit werde ferner ein Druck ausgeübt, der, auf die Flächeneinheit bezogen, durch P_0 dargestellt werde. Die analogen Grössen für den starren Körper seien ϱ', P_i', P_0', O'. Ausser jenen Kräften kommen aber noch in Betracht die Molecularkräfte. Man bemerke nun, dass die Arbeit, welche von der zwischen den Theilchen μ_1, μ_2 thätigen Molecularkraft $\mu_1\mu_2 f(r)$ geleistet wird, wenn das System, zu dem die Theilchen gehören, eine mit seiner Natur

verträgliche Verschiebung erleidet, wodurch die Entfernung der Theilchen von r_0 bis r wächst, den Werth:

$$-\mu_1\mu_2\int_{r_0}^{r} f(r)\,dr = \mu_1\mu_2\{F(r)-F(r_0)\}$$

hat. Für jede unendlich kleine Aenderung unseres Systemes hat man hiernach, wenn ein Theilchen der Flüssigkeit durch m, ein Theilchen des festen Körpers durch m' bezeichnet wird, und wenn ferner F sich auf die wechselseitige Wirkung der Theilchen m, Φ auf die Wirkung zwischen einem Theilchen m und einem Theilchen m' bezieht, folgende Gleichung, in welcher die übrigen Bezeichnungen leicht zu verstehen sind:

$$\int P_i\delta p_i\,\varrho\,dk+\int P_i'\delta p_i'\,\varrho'\,dk'+\int P_0\delta p_0\,dO+\int P_0'\delta p_0'\,dO'$$
$$+\{Sm_1m_2F(r)-Sm_1m_2F(r_0)\}+\{Sm_1m_2'\Phi(r)-Sm_1m_2'\Phi(r_0)\}=0.$$

Aus der letzten Gleichung lässt sich unter der Annahme, dass die Flüssigkeiten homogene und incompressible Ausfüllungen des Raumes sind, eine Variationsformel herleiten, welche die Erscheinungen der Capillarität und die gewöhnlichen hydrostatischen Erscheinungen durchaus befriedigend darstellt. Gegen jene Annahme lässt sich nun zwar Manches erinnern; gleichwohl wollen wir uns derselben bedienen, da wir nur auf die Form der resultirenden Gleichung Gewicht legen, sowie wir auch im ersten Theile in der Theorie der Elasticität bei der Ableitung der Elasticitätsgleichungen die Vorstellung zu Hülfe nahmen, dass die festen Körper stetige Ausfüllungen des Raumes seien.

Denken wir uns nun, um die in der letzten Gleichung auftretenden Summen umzugestalten, dass die Oberfläche der Flüssigkeit mit einer Schicht von derselben Flüssigkeit bedeckt sei, deren Dicke dem Actionsradius der Molecularkräfte zwischen den Theilchen der Flüssigkeit gleichkommt. Bezeichnen wir ferner die Summe

$$Sm\,F(r),$$

welche sich über alle Theilchen einer Kugel erstreckt, die um ein Theilchen der Flüssigkeit gelegt ist und deren Radius der Actionsradius ist, mit k, so hat man:

$$Sm_1m_2F(r) = \tfrac{1}{2}Smk - \tfrac{1}{2}S\mu m F(r),$$

wenn sich die erste Summe über alle Theilchen der ursprünglichen flüssigen Masse erstreckt, und wenn die zweite Summe sich auf je zwei Theilchen μ, m bezieht, von denen jenes in der fingirten oberflächlichen Schicht liegt, dies aber der ursprünglichen flüssigen Masse angehört und innerhalb der Actionssphäre für μ liegt. Das erste Glied des obigen Ausdruckes ist dem Volumen der Flüssigkeit proportional, übrigens aber nur von der Natur der Flüssigkeit abhängig. Und für das zweite Glied kann man in Rücksicht, dass der Actionsradius gegen die übrigen Dimensionen verschwindet, offenbar setzen pS, wenn S die Oberfläche der Flüssigkeit und p eine von der Natur der Flüssigkeit abhängige Constante ist. Man hat also:

$$Sm_1m_2F(r) - Sm_1m_2F(r_0) = -p\delta S.$$

Was die Summe $Sm_1m_2'\Phi(r)$ betrifft, so ist sie wegen der Kleinheit des Actionsradius mit der Fläche proportional, auf welcher der feste Körper von der Flüssigkeit berührt wird, und übrigens nur von der Wechselwirkung der beiden Körper abhängig. Ist daher q eine durch letztere bedingte Constante und Ω der Inhalt der gedachten Fläche, so hat man:

$$Sm_1m_2'\Phi(r) - Sm_1m_2'\Phi(r_0) = q\delta\Omega.$$

Für die Arbeit der Molecularkräfte erhalten wir dem Gesagten zufolge, da die freie Oberfläche der Flüssigkeit mit O bezeichnet wurde, wenn ausserdem $p = o$, $p - q = \omega$ gesetzt wird:

$$-o\delta O - \omega\delta\Omega.$$

Wir wollen sogleich hier schon bemerken, dass die Arbeit der Druckkräfte verschwindet, so oft die beiden Körper einem allenthalben gleichgrossen Drucke ausgesetzt sind, ein Fall, auf den wir uns in der Folge beschränken. Es sei nämlich für irgend eine Variation δn, $\delta n'$ die Entfernung der neuen Oberfläche von der ursprünglichen Oberfläche des einen und anderen Körpers, solche Entfernungen in der Richtung der von innen nach aussen gerichteten Normalen gerechnet. Alsdann ist, wenn P_0 der constante Druck ist:

$$\int P_0\delta p_0\, dO + \int P_0'\delta p_0'\, dO' = P_0\left\{\int \delta n\, dO + \int \delta n'\, dO'\right\}.$$

Die beiden in der Klammer stehenden Integrale sind aber offenbar nichts Anderes, als die Variationen der Volumina, und verschwinden also.

Der in Wirklichkeit auftretende Druck rührt allermeist von der Atmosphäre oder einem anderen Gase her, in dem sich das System befindet. Nicht bloss von der Elasticität dieses Gases kann nach Obigem abgesehen werden, sondern auch von der Molecularwirkung, die dasselbe etwa ausüben könnte.

Mit Rücksicht auf das Vorhergehende erhalten wir für ein System, das aus einem festen Körper und einer Flüssigkeit besteht und sich unter den gewöhnlichen Umständen befindet, folgende Variationsformel für den Zustand des Gleichgewichtes:

$$\int P_i \varrho\, \delta p_i\, dk + \int P_i' \varrho'\, \delta p_i'\, dk' - o\delta O - \omega \delta \Omega = 0.$$

Stellt man den hier links stehenden Ausdruck als Variation einer und derselben Function hin, so ist letztere der Gleichung zufolge ein Maximum oder ein Minimum, und zwar, um der beiden Hauptfälle zu gedenken, ein allgemeines Maximum für den Fall des vollkommen stabilen, ein allgemeines Minimum für den Fall des vollkommen labilen Gleichgewichtes.

II.

Erforschung specieller Fälle des Gleichgewichtes eines Systemes, das aus einem festen Körper und einer Flüssigkeit besteht.

---

1. Allgemeine Betrachtungen.

Bei einem Systeme, welches aus einem festen Körper (dem Gefässe) und einer damit in Berührung stehenden Flüssigkeit besteht, kann von den an dem festen Körper wirkenden Kräften abgesehen werden, indem sich alle Beziehungen aus Variationen ableiten lassen, die bloss an der Flüssigkeit vorgenommen werden. Ferner kann auch, wie bereits bemerkt, von dem Drucke abgesehen werden, den ein elastisches Gas ausübt, sowie von den Molecularkräften, die zwischen den Theilchen des Gases und denen des flüssigen und des festen Körpers wirken. Hiernach erhalten wir für jede an der Flüssigkeit vorgenommene Variation, wofern Gleichgewicht besteht, folgende Bedingungsgleichung:

$$\varrho \int P_i \delta p_i \, dk - o \delta O - \omega \delta \Omega = 0,$$

worin ϱ die Masse der Volumeneinheit bedeutet. Wir wollen unterstellen, dass die Flüssigkeit keiner anderen Kraft als nur der Schwere unterworfen sei. Dann hat man:

$$P_i \delta p_i = - g \delta z;$$

hier bedeutet $g = 980{,}88$ die Beschleunigung der Schwere, dabei wie gewöhnlich das Centimeter als Längeneinheit genommen; als Einheit der Kraft nehmen wir das Gewicht eines

Gramm und stellen demgemäss die Masse dar durch den Quotienten aus dem Gewichte und der Beschleunigung g der Schwere. Die Axe der z nehmen wir in der der Schwere entgegengesetzten Richtung.

Hiernach hat man:

$$o\,\delta O + \omega\,\delta\Omega + g\varrho\,\delta\int z\,dk = 0.$$

Für $g\varrho$ ist hierbei offenbar das specifische Gewicht s der Flüssigkeit zu setzen.

Es werde nun erstlich die Flüssigkeit so deformirt, dass die Berührungsfläche Ω ungeändert bleibt, somit $\delta\Omega$ verschwindet und nur die freie Oberfläche durch eine neue ersetzt wird, die aber allenthalben der ursprünglichen sehr nahe liegt. Man denke sich in der ursprünglichen Oberfläche die beiden Systeme der Krümmungslinien; sie zerfällt dadurch in rechteckige Flächenelemente, welche wir für dO nehmen. Denkt man sich dann durch alle Punkte der Krümmungslinien die Normalen der Fläche, so bestimmen diese auch auf der benachbarten neuen Oberfläche zwei Schaaren von Curven, wodurch auch letztere in rechteckige Elemente dO' getheilt wird. Berücksichtigt man nun, dass die beiden Krümmungslinien in jedem Punkte einer Fläche die beiden Hauptschnitte tangiren, und dass die Normalen der Fläche, welche durch unendlich nahe Punkte einer Krümmungslinie gehen, sich im Krümmungsmittelpunkte des tangirenden Hauptschnittes schneiden, so ist klar, dass, wenn δn die Entfernung der beiden Oberflächen und R_1 und R_2 die Krümmungshalbmesser der beiden Hauptschnitte in dem betrachteten Punkte sind, und wenn ds und $d\sigma$ die beiden Seiten eines Elementes dO der ursprünglichen Oberfläche, ds' und $d\sigma'$ die beiden Seiten des correspondirenden Elementes dO' der neuen Oberfläche bezeichnen, man zu setzen hat:

$$ds' = ds\left(1+\frac{\delta n}{R_1}\right), \quad d\sigma' = d\sigma\left(1+\frac{\delta n}{R_2}\right).$$

Also ist:

$$dO' = ds'\,d\sigma' = ds\,d\sigma\left(1+\frac{\delta n}{R_1}\right)\left(1+\frac{\delta n}{R_2}\right),$$

woraus folgt:

$$\delta(dO) = dO' - dO = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \delta n \, dO.$$

Weiter hat man zu setzen:

$$\delta \int z \, dk = \int z \, \delta n \, dO,$$

wonach also die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht in folgende übergeht:

$$\int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{s}{o} z\right) \delta n \, dO = 0.$$

Da nun diese Gleichung bestehen muss, wie auch immer die Deformation beschaffen sein mag, so muss der in dem Integrale eingeklammerte Ausdruck für alle Elemente der Oberfläche constant sein, denn nur alsdann verschwindet das Integral für jede zulässige Annahme über δn, weil für letztere die Aenderung des Volumens, welche durch

$$\int \delta n \, dO$$

dargestellt wird, für sich verschwinden muss. Für die freie Oberfläche der Flüssigkeit hat man also, unter c eine Constante verstanden:

I) $$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{s}{o}(c - z).$$

Wir variiren jetzt zweitens so, dass sich auch die Berührungsfläche Ω ändert. Die Grenze zwischen den Theilen O und Ω, welches eine auf dem festen Körper liegende Linie ist, heisse S und an ihre Stelle trete durch die Deformation die Linie S', welche jener unendlich nahe liegt. Längs der Linie S mögen auf der ursprünglichen, freien Oberfläche O Normalen errichtet werden. Diese schneiden in die neue freie Oberfläche O' längs einer Curve ein, die Σ heissen möge. Die Variation von O besteht dann offenbar aus dem im Allgemeinen theils positiv, theils negativ zu nehmenden Theile von O', der zwischen den Curven S' und Σ liegt, und ferner aus dem Unterschiede zwischen dem durch Σ umgrenzten Theile von O' und der ursprünglichen Oberfläche O. Was nun erstlich letztere Differenz betrifft, so hat man für dieselbe den Ausdruck:

$$\int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) \delta n \, dO,$$

wie aus dem Früheren leicht gefolgert werden kann.

Was ferner den ersterwähnten Theil der Variation von O betrifft, so sei dS ein Element des Umringes S, $\delta\nu$ die Entfernung des letzteren von der neuen Grenzcurve S', diese Entfernung in der Richtung der von innen nach aussen gerichteten Normale von S als positiv gerechnet. Alsdann ist $dS\delta\nu$ der absolute Werth des Inhaltes eines Flächenelementes, das von dS, einem hiermit als parallel und gleich zu betrachtenden Elemente von S', und den beiden in den Endpunkten von dS und in der Oberfläche des festen Körpers errichteten Normalen begrenzt wird. Wenn nun senkrecht auf S in den Endpunkten von dS zwei Normalebenen gelegt werden, so schneiden diese aus dem zwischen Σ und S' gelegenen Theile von O' ein Element heraus, das als Projection des Elementes $dS\delta\nu$ auf O' anzusehen ist. Der Inhalt jenes Elementes drückt sich aber aus durch den absoluten Werth von $\cos i\,\delta\nu\,dS$, wenn i der Winkel ist, welchen an der Stelle von dS die Normalen der Fläche O und der Oberfläche des Körpers einschliessen, beide Normalen in der Richtung von innen nach aussen gerechnet. Da nun, wenn $\delta\nu$ positiv ist und i zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ liegt, an der Stelle von dS die Oberfläche von O zunimmt, so drückt sich nach Obigem der fragliche Theil der Variation von O aus durch:

$$\int \cos i\,\delta\nu\,dS.$$

Gleichzeitig ersehen wir noch, dass die Variation von Ω dargestellt wird durch:

$$\int \delta\nu\,dS.$$

Es erübrigt noch, die Variation des Integrales $\int z\,dk$ zu bestimmen. Nun bemerke man aber, dass der Inhalt des ringförmigen Raumes, der von der Oberfläche des Körpers, der Fläche O' und dem Complexe der in S errichteten Normalen von O begrenzt wird, ein Unendlich-Kleines der zweiten Ordnung ist. Hieraus folgt, dass für die Variation des gedachten Integrales zu setzen ist:

$$\int z\,\delta n\,dO.$$

Indem wir jetzt schliesslich die gefundenen Variationen in die Bedingungsgleichung für das Gleichgewicht einsetzen und die

unter I) aufgeführte Relation und den Umstand, dass das Volumen constant bleibt, berücksichtigen, finden wir:

$$\int (o \cos i + \omega)\, \delta\nu\, dS = 0.$$

Offenbar wird dieser Gleichung bei allen statthaften Deformationen nur dann genügt, wenn man hat:

II) $$o \cos i + \omega = 0.$$

In Betreff der beiden Constanten o und ω sind nun zwei Hauptfälle zu unterscheiden. Wenn erstlich der absolute Werth von ω nicht grösser ist, als der von o, so gibt es einen reellen Werth für i, der der Gleichung II) genügt, und letztere lehrt, dass alsdann die freie Oberfläche der Flüssigkeit unter einem constanten Winkel in die Oberfläche des Körpers einschneidet. Dies steht mit der Beobachtung insofern in Einklang, als in der That jener sogenannte Randwinkel bei einer Flüssigkeit und einem festen Körper, der von jener nicht benetzt wird, unter regelmässigen Verhältnissen an der ganzen Grenze der von der Flüssigkeit berührten Fläche constant erscheint. Im Uebrigen aber ändert sich der Randwinkel nicht bloss mit der Flüssigkeit und dem festen Körper, sondern er zeigt sich bei derselben Flüssigkeit und demselben Körper von der augenblicklichen, mannigfach wechselnden Beschaffenheit der Oberfläche abhängig. So fand Quincke durch directe Messungen, dass das Supplement des Winkels i bei demselben Quecksilber und derselben Platte aus Glas oder Gyps zwischen 38^0 und 45^0 schwankte; vergl. über die Capillaritätsconstante des Quecksilbers, Poggendorff's Annalen Bd. CV. Der Randwinkel verschwindet und die Oberfläche der Flüssigkeit berührt die des festen Körpers, wenn die absoluten Werthe der beiden Constanten gleich werden. Ist $\omega = o$, so findet offenbar keine Einwirkung auf die Flüssigkeit von Seiten des festen Körpers statt, und es ist die Berührung eine solche, dass sich der ausserhalb des festen Körpers und der Flüssigkeit befindliche Raum nach dem Berührungsrande hin zuschärft, da $i = 180^0$ wird. Ist aber $\omega = -o$, so wird $i = 0$ und der von der Flüssigkeit erfüllte Raum schärft sich nach dem Berührungsrande hin zu. In diesem Falle verhalten sich die Sachen offenbar genau so,

wie wenn die ganze Oberfläche des festen Körpers mit einer so dünnen Schicht der Flüssigkeit überzogen wäre, dass ihre Oberfläche mit der des Körpers vertauscht werden könnte und die Einwirkung der äusseren Kräfte auf die Schicht durch Haften am Körper aufgehoben wäre.

Wenn zweitens der absolute Werth der Constante ω den der Constante o übertrifft, so kann der Gleichung II) durch reelle Werthe von i nicht genügt werden und folglich ein Gleichgewicht nicht stattfinden. Es wird dies ersichtlich eintreten, so oft die Wirkung des festen Körpers auf die ihm zunächst gelegenen Theilchen der Flüssigkeit das Uebergewicht über die Wirkung der Flüssigkeit auf dieselben Theilchen hat. Die Flüssigkeit wird sich alsdann über den festen Körper ausbreiten und man hat es mit einer Flüssigkeit zu thun, die den festen Körper benetzt. Ueberzieht man aber letzteren mit einer sehr dünnen Schicht der Flüssigkeit, so werden dadurch die Verhältnisse auf die des Falles zurückgeführt, wo der Randwinkel verschwindet.

Die Ausdehnung der vorhergehenden Betrachtungen auf ein System, in welchem neben einer schweren Flüssigkeit mehr als ein fester Körper auftritt, bietet keine Schwierigkeiten dar. In der Variationsformel kommen dann zu dem Gliede $\omega \delta \Omega$ noch andere Glieder derselben Art, die sich auf die Berührungsflächen zwischen der Flüssigkeit und den betreffenden neuen Körpern beziehen. Die Gleichung I) bleibt ungeändert stehen, und neben die Gleichung II) treten weitere Gleichungen derselben Art, denen an den Berührungsstellen der Flüssigkeit und der starren Körper einzeln Genüge geschehen muss.

In den Problemen, die wir zunächst im Folgenden behandeln, ist z als Function einer einzigen Veränderlichen zu betrachten. Die Gleichung I) ist hier eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einer unabhängigen Veränderlichen, und ihre Integration liefert für z eine Function, in der neben c zwei willkürliche Constanten auftreten. In dem einzelnen Falle bestimmen sich die letzteren durch die Bedingungen, denen an den Grenzen der Oberfläche genügt werden muss. Die Constante c hängt von der Wahl des Anfangspunktes der z

ab und bestimmt sich, nachdem diese Wahl getroffen ist, durch das Volumen der Flüssigkeit.

2. Capillarerscheinungen bei einer schweren Flüssigkeit mit sehr grosser Niveaufläche und einer in dieselbe senkrecht eingetauchten Platte von sehr grosser Breite.

Die Oberfläche einer in einem Gefässe befindlichen Flüssigkeit kann in der Gegend der Mitte, sofern die horizontalen Dimensionen des Gefässes sehr gross sind, als eben betrachtet werden. Wird nun an jener Stelle in die Flüssigkeit eine verticale Platte gebracht, deren Breite, d. h. deren grössere horizontale Dimension sehr gross ist, so nimmt die Oberfläche der Flüssigkeit in der Gegend der Mitte wegen der Capillarwirkung eine cylindrische Form an, die jetzt bestimmt werden soll. Die horizontalen Seiten des die Flüssigkeit begrenzenden Cylinders laufen der Platte parallel, so dass die z-Coordinate der Oberfläche als Function des Abstandes von der Platte zu betrachten ist. Dieser Abstand fällt mit der x-Coordinate zusammen, wenn wir die y- und z-Axe eines räumlichen rechtwinkligen Coordinatensystemes in die Platte legen, und zwar die letzte Axe in Uebereinstimmung mit dem Früheren der Richtung der Schwere entgegen. Für die auf der Seite der positiven x gelegene Oberfläche haben wir alsdann, da die Krümmung parallel der Platte verschwindet, in Folge der Gleichung I):

$$1) \qquad \frac{-\frac{d^2z}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{c-z}{a^2},$$

wo für die gebrochene Potenz der positive Werth zu nehmen und für $\frac{1}{a^2}$ die Grösse $\frac{s}{o}$ zu setzen ist, unter s das specifische Gewicht der Flüssigkeit verstanden.

Die Integration der letzten Gleichung liefert:

$$\frac{1}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=p-\frac{(c-z)^2}{2a^2},$$

wo die gebrochene Potenz positiv zu nehmen und p die Integrations-Constante ist. Für letztere ist in unserem Falle die Einheit zu setzen. Für $z = c$ nämlich und nur für diesen Werth verschwindet die zweite Krümmung der Oberfläche, so dass c die Höhe des entfernteren Theiles der Oberfläche ist, der als eben und horizontal angesehen werden muss. Für jenen Werth von z muss also auch $\frac{dz}{dx}$ verschwinden, woraus sich die Integrations-Constante in der angegebenen Weise bestimmt. Der absolute Werth der Grösse $c - z$ kann den Werth $a\sqrt{2}$ nicht übersteigen. Indem wir der Einfachheit willen den Anfangspunkt der Coordinaten in die Höhe des ebenen Theiles des Niveaus legen, erhalten wir für die letzte Gleichung:

$$\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{z^2}{2a^2}.$$

Wenn nun erstlich die Flüssigkeit die eingetauchte Platte benetzt, so berührt ihre Oberfläche die der Platte längs einer horizontalen Linie, und wenn die Ordinate der letzteren z_0 ist, so hat man der letzten Gleichung gemäss:

$$z_0 = +a\sqrt{2}.$$

Dass das gewählte Vorzeichen das richtige ist, erhellt aus 1), da an der Berührungsstelle die Oberfläche nach oben hin hohl und folglich $\frac{d^2z}{dx^2}$ in der Nähe jener Stelle positiv ist. An der Platte erhebt sich hiernach die Flüssigkeit um die Höhe $a\sqrt{2}$ über den ebenen Theil des Niveaus.

Aus der letzten Differentialgleichung folgt:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{z\sqrt{4a^2 - z^2}}{2a^2 - z^2},$$

wo für die Wurzel ihr absoluter Werth zu nehmen ist, wenigstens in der Nähe der Berührungsstelle, da hier der Differentialquotient negativ sein muss. Dass aber für die ganze Oberfläche jener Werth zu nehmen sei, ersieht man aus dem Integrale der letzten Gleichung, wonach z und folglich auch $\frac{dz}{dx}$ nur für $x = \infty$ verschwindet. Dies Integral ist folgendes:

$$x = \sqrt{4a^2 - z_0^2} - \sqrt{4a^2 - z^2} + a \log \frac{z_0}{z} \cdot \frac{\sqrt{4a^2 - z^2} + 2a}{\sqrt{4a^2 - z_0^2} + 2a}.$$

Wenn zweitens die Oberfläche der Flüssigkeit in die Fläche der Platte einschneidet und wenn, wie wir annehmen wollen und wie es bei Quecksilber und Glas der Fall ist, der Randwinkel zwischen 90^0 und 180^0 liegt, so hat man dem Früheren zufolge für die Höhe z_0 der Horizontallinie, längs welcher sich die beiden erwähnten Flächen schneiden:

$$\frac{z_0^2}{2a^2} = 1 - \sin i,$$

woraus sich, da die Oberfläche nach oben hin in der Nähe der Schnittlinie convex und folglich $\frac{d^2z}{dx^2}$ negativ ist, mit Rücksicht auf 1) ergibt:

$$z_0 = -a\sqrt{2}\sqrt{1 - \sin i}.$$

Es tritt also hier eine Depression unter den ebenen Theil des Niveaus ein, deren Betrag $a\sqrt{2}\sqrt{1 - \sin i}$ ist. Die Oberfläche der Flüssigkeit, für welche man dieselbe Gleichung, wie im vorhergehenden Falle erhält, erhebt sich von ihrer tiefsten Stelle z_0 stetig, um schliesslich in den ebenen Theil des Niveaus zu verlaufen.

Die im Obigen gewonnenen Resultate stimmen mit der Beobachtung im Allgemeinen überein. Hagen (über die Oberfläche der Flüssigkeiten; Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1845 und 1846) fand durch directe Messungen, dass die grösste Erhebung über das Niveau, d. i. $a\sqrt{2}$, beim Wasser unabhängig von der Beschaffenheit der eingetauchten Platte war, wofern letztere nur gehörig benetzt war. Er erhielt dieselben Werthe für jene Grösse bei Platten aus Messing, Glas, Thonschiefer, Buxbaum. Es ergab sich ferner, dass die im Obigen gefundene Gleichung der Oberfläche mit der Wirklichkeit übereinstimmt. Hiervon überzeugt der folgende Auszug aus der Tabelle Hagen's über die zu einander gehörigen Werthe der Grössen z und x, wie sie sich als Mittel aus fünf Beobachtungen ergaben, und die Werthe x_1 des Abstandes von der Platte, wie sie mittelst der oben

angegebenen Gleichung aus der Grösse z sich berechnen, wenn für z_0 die beobachtete grösste Erhebung an der Platte angenommen wird. Als Einheit ist die Pariser Linie angenommen.

z	x	x_1	z	x	x_1
1,37	0,00	0,00	0,34	0,94	0,96
0,70	0,31	0,33	0,12	1,88	1,95
0,49	0,63	0,63	0,04	3,13	3,01

Durch Reduction auf das Centimeter findet man für das Wasser aus dem mitgetheilten grössten Werthe für z, da 4,433 Par. Linien einem Centimeter gleich sind:

$$z_0 = a\sqrt{2} = 0{,}309,$$

und:

$$a^2 = \frac{\sigma}{s} = 0{,}0477.$$

Die Werthe des Maximums der Erhebung sind von der augenblicklichen Beschaffenheit der Oberfläche des Wassers abhängig. Bei einer frisch hergestellten Oberfläche sind sie am grössten und nehmen alsdann zunächst rasch, dann immer langsamer an Grösse ab. Bei Versuchen an destillirtem Wasser, sowie an Brunnenwasser, die merklich dieselben Werthe liefern, fand Hagen für die erwähnte Grösse Werthe, die für die Constante a^2 Werthe lieferten, welche von 0,047 bis 0,061 wechselten.

3. Niveau-Aenderung bei einer schweren Flüssigkeit durch zwei ebene, mit einander parallele und senkrechte Platten von sehr grosser Breite.

Wir untersuchen zunächst den Fall, wo beide Platten von der Flüssigkeit benetzt werden, und folglich letztere sich sowohl an der äusseren, wie auch an der inneren Seite einer jeden Platte, und zwar offenbar an jeder Platte um bezüglich gleich viel erhebt. Die Gestalt der flüssigen Oberfläche ausserhalb der Platten wird durch das Vorhergehende bestimmt, wenn wir wieder annehmen, dass die horizontalen Dimensionen der

Flüssigkeit, sowie die horizontale Breite der Platten sehr gross sind.

Es werde der Anfangspunkt der z-Coordinaten in die Höhe des als eben zu betrachtenden Theiles der Oberfläche gelegt. Dann ist, wofern die Flüssigkeit ausserhalb der Platten, wie unterstellt werden soll, mit dem von den Platten eingeschlossenen Theile im Zusammenhange steht, die früher durch c bezeichnete Constante gleich Null zu setzen, weil für $z=0$ die Krümmung der als eine einzige zu betrachtenden Oberfläche verschwindet. Hiernach ist:

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}=\frac{z}{a^2}.$$

Wenn wir nun ferner die z-Axe in die Mitte zwischen beide Platten legen, so dass die Oberfläche zwischen den Platten in Bezug auf die yz-Ebene symmetrisch wird, und die Höhe derjenigen Punkte der Oberfläche, in welchen die Tangentialebene horizontal liegt, durch z' bezeichnen, so finden wir durch Integration der letzten Gleichung und durch gehörige Bestimmung der Integrations-Constante:

$$dx=\frac{2a^2+z'^2-z^2}{\sqrt{(z^2-z'^2)\ (4a^2+z'^2-z^2)}}\,dz,$$

wo, wie man leicht findet, die Wurzel für den auf der Seite der positiven x gelegenen Theil der Fläche positiv zu nehmen ist und die Grösse z zwischen z' und $\sqrt{z'^2+2a^2}$ liegt. Aus letzterer Gleichung sehen wir schon so viel, dass die Oberfläche der Flüssigkeit zwischen den Platten von ihrer tiefsten Stelle mit den Coordinaten $x=0$, $z=z'$ an beiderseits in die Höhe steigt, um schliesslich die Platten zu berühren.

Die obige Gleichung lässt sich leicht durch Integration auf elliptische Functionen zurückführen. Substituirt man nämlich:

$$z=z'u, \quad u^2=\frac{\Delta^2(\varphi)}{1-c^2},$$

wo gesetzt ist:

$$\sqrt{1-c^2 \sin\varphi^2} = \Delta(\varphi), \qquad \frac{4a^2}{z'^2+4a^2} = c^2,$$

so findet man sogleich:

$$dx = \frac{c}{2a} \cdot \frac{2a^2+z'^2-z'^2u^2}{\sqrt{(u^2-1)(1-[1-c^2]u^2)}}\,du$$
$$= \frac{\sqrt{1-c^2}}{2ac} \cdot \frac{2a^2+z'^2-z'^2u^2}{\sin\varphi\cos\varphi}\,du$$
$$= \frac{a\sqrt{1-c^2}}{c^3} \cdot \frac{2-c^2-2\Delta^2(\varphi)}{\sin\varphi\cos\varphi}\,du.$$

Durch Differentiation der Gleichung, welche u mit φ verbindet, ergibt sich:

$$du = -\frac{c^2}{\sqrt{1-c^2}} \cdot \frac{\sin\varphi\cos\varphi\,d\varphi}{\Delta(\varphi)}.$$

Substituirt man diesen Werth in vorige Gleichung und integrirt dieselbe, wobei zu beachten ist, dass den Werthen $x=0$ und $z=z'$ der Werth $\varphi=\frac{\pi}{2}$ entspricht, so kommt:

$$x = \frac{a}{c}\left\{(2-c^2)\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} - 2\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\varphi)\,d\varphi\right\}.$$

Bezeichnen wir die Entfernung beider Platten durch d und die Höhe der Horizontallinien, längs denen die Platten von der Oberfläche der Flüssigkeit berührt werden, durch z'', so sind $x=\frac{d}{2}$ und $z=z''$ zu einander gehörige Werthe, die der gefundenen Gleichung genügen müssen. Da aber in den gedachten Horizontallinien die Tangentialebenen senkrecht stehen, so hat man in Folge der oben aufgeführten Differentialgleichung erster Ordnung:

$$z'' = \sqrt{2a^2+z'^2} = \frac{a\sqrt{2}\sqrt{2-c^2}}{c}.$$

Diesem Werthe von z entspricht den Substitutions-Formeln gemäss der Werth $\frac{\pi}{4}$ von φ. Hiernach erhält man, indem man in die gefundene Gleichung der Oberfläche $x=\frac{d}{2}$, $\varphi=\frac{\pi}{4}$ setzt, eine Gleichung, die dazu dient, die Grössen a, d und z' in ihrer gegenseitigen Abhängigkeit zu bestimmen. Wenn die

Entfernung der Platten sehr klein ist, so wird z' gegen a sehr gross, folglich erlangt der Modulus c einen sehr kleinen Werth. Für diesen Fall findet man durch Entwickelung der elliptischen Functionen bis zur 4. Potenz von c inclusive:

$$d = a\left(c + \frac{c^3}{4}\left[1 + \frac{\pi}{4}\right]\right),$$

woraus sich annähernd:

$$c = \frac{d}{a} - \frac{d^3}{a^3} \cdot \frac{4+\pi}{16}$$

und folglich:

$$z' = \frac{2a^2}{d} - d\frac{4-\pi}{8}$$

ergibt.

Für solche Distanzen der Platten, welche, gegen a gehalten, nicht sehr klein sind, kann man sich mit Vortheil der folgenden von Hagen berechneten Tabelle bedienen, in welcher zu einander gehörige Werthe der Grössen:

$$1 - \frac{z'^2}{z''^2} = \frac{c^2}{2-c^2} \text{ und } \frac{d}{2z'}$$

zusammengestellt sind.

$\frac{c^2}{2-c^2}$	$\frac{d}{2z'}$	$\frac{c^2}{2-c^2}$	$\frac{d}{2z'}$	$\frac{c^2}{2-c^2}$	$\frac{d}{2z'}$	$\frac{c^2}{2-c^2}$	$\frac{d}{2z'}$
0,00	0,0000	0,10	0,0549	0,20	0,1219	0,30	0,2056
0,01	0051	0,11	0610	0,21	1294	0,31	2152
0,02	0102	0,12	0672	0,22	1371	0,32	2250
0,03	0154	0,13	0736	0,23	1450	0,33	2350
0,04	0207	0,14	0800	0,24	1530	0,34	2453
0,05	0262	0,15	0866	0,25	1613	0,35	2559
0,06	0317	0,16	0934	0,26	1697	0,36	2669
0,07	0374	0,17	1003	0,27	1784	0,37	2781
0,08	0431	0,18	1073	0,28	1872	0,38	2896
0,09	0489	0,19	1145	0,29	1963	0,39	3014
$\frac{c^2}{2-c^2}$	$\frac{d}{2z'}$	$\frac{c^2}{2-c^2}$	$\frac{d}{2z'}$	$\frac{c^2}{2-c^2}$	$\frac{d}{2z'}$	$\frac{c^2}{2-c^2}$	$\frac{d}{2z'}$
0,40	0,3136	0,50	0,4588	0,60	0,6660	0,70	0,9892
0,41	3261	0,51	4762	0,61	6918	0,71	1,0321
0,42	3391	0,52	4942	0,62	7187	0,72	0776
0,43	3524	0,53	5129	0,63	7469	0,73	1260
0,44	3662	0,54	5322	0,64	7765	0,74	1775
0,45	3804	0,55	5523	0,65	8075	0,75	2325
0,46	3951	0,56	5731	0,66	8401	0,76	2914
0,47	4103	0,57	5948	0,67	8744	0,77	3548
0,48	4259	0,58	6175	0,68	9106	0,78	4229
0,49	4421	0,59	6412	0,69	9488	. .	. . .

Aus den zahlreichen Versuchen, wodurch die vorhergehenden Ergebnisse verificirt werden, heben wir einen von Hagen angestellten hervor. Derselbe fand für die oben durch z_0, z', z'' bezeichneten Grössen bei Brunnenwasser und für zwei Platten, deren Entfernung durch eine dritte dazwischen befindliche Platte zu 0,2808 bestimmt wurde, folgende Werthe:

$$z_0 = 0{,}3181, \quad z' = 0{,}3553, \quad z'' = 0{,}4748.$$

Aus den beiden letzten Grössen berechnet sich:

$$a^2 = \tfrac{1}{2}(z''^2 - z'^2) = 0{,}0496,$$

welcher Werth innerhalb der früher angegebenen von Hagen beobachteten Grenzen für diese Constante liegt. Man findet dann ferner unter Zugrundelegung jenes Werthes:

$$z_0 = a\sqrt{2} = 0{,}3149,$$

was von der direct gemessenen Grösse nur wenig abweicht. Der grösste Werth, welchen Hagen für z' bei der oben angegebenen Distanz der Platten erhielt, war 0,5121. Hieraus ergibt sich mit Hülfe obiger Tafel für die Constante a^2, die beim Wasser natürlich der Constante o gleichkommt, der Werth 0,0759.

Hagen dehnte seine Untersuchungen über die Erhebung zwischen parallelen Platten auch auf Alkohol und Olivenöl aus. Er fand, dass bei diesen beiden Flüssigkeiten die Grösse a^2 keinen merklichen derartigen Wechsel darbietet, wie es beim Wasser der Fall war. Für Alkohol vom specifischen Gewichte 0,7967 ergab sich bei der Entfernung 0,1624 der beiden Platten aus vier Messungen $z' = 0{,}3174$, woraus $a^2 = 0{,}0296$ und $o = 0{,}0236$ folgt. Für Olivenöl vom specifischen Gewichte 0,9129 ergab sich bei derselben Distanz der Platten aus sechs Messungen $z' = 0{,}4473$, woraus $a^2 = 0{,}0377$, $o = 0{,}0344$ folgt. Die beiden letzten Bestimmungen wurden bei einer Temperatur von ungefähr 15° R. ausgeführt.

Neben den bisher erörterten Fall, wo beide Platten von der Flüssigkeit benetzt werden, stellt sich zweitens der, wo solches nicht stattfindet und die Oberfläche in die Ebenen beider Platten unter einem Winkel einschneidet. Wir begnügen

uns hier damit, anzunehmen, dass der gedachte Randwinkel an sämmtlichen vier Grenzflächen der Platten den Werth 180^0 habe. Alsdann ist, wie leicht einzusehen, in der Differentialgleichung erster Ordnung, an die sich im Obigen die weitere Analyse anschloss, das negative Vorzeichen der Wurzel zu nehmen. Aus dieser Bemerkung folgt ohne Weiteres, dass sich jetzt die Oberfläche von der im vorher betrachteten Falle gefundenen nur in ihrer Lage unterscheiden kann, und dass dieselbe als das Spiegelbild der letzteren in Bezug auf die Ebene betrachtet werden kann, von welcher aus die Coordinaten z gerechnet werden. Die Formeln, welche die jetzt stattfindende Capillardepression bestimmen, unterscheiden sich also nur durch das Vorzeichen der z von den oben gefundenen.

Es mögen endlich noch die Verhältnisse bei zwei Platten besprochen werden, von welchen die eine von der Flüssigkeit beiderseits benetzt wird, während an den beiden Grenzflächen der zweiten Platte die Flüssigkeit den Randwinkel von 180^0 darbietet. Ausserhalb der Platten erhebt sich die Flüssigkeit an der ersten Platte von dem ebenen Theile des Niveaus aus bis zu einer Höhe, die dem Früheren gemäss gefunden wird. Ebenso senkt sie sich an der zweiten Platte unter den ebenen Theil des Niveaus und zwar ist das Maximum der Senkung dem Maximum der Erhebung an der ersten Platte gleich. Was den Theil der Oberfläche betrifft, der von den Platten eingeschlossen wird, so erhebt er sich an der ersten Platte, während er in der Nähe der zweiten Platte abwärts steigt, so dass dieser Theil mindestens eine Inflexionslinie aufweisen muss. Aus der allgemeinen Gleichung für die Oberfläche folgt aber, dass eine solche Inflexionslinie stets in der Höhe des ebenen Theiles des Niveaus liegen muss, wonach offenbar nur eine einzige Inflexion stattfinden kann. Für die Gleichung des fraglichen Theiles der Oberfläche hat man, wenn die z-Coordinaten von der Höhe des ebenen Theiles des Niveaus an gerechnet werden:

$$\frac{1}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}} = p - \frac{z^2}{2a^2}.$$

Wenn nun ε der spitze Winkel ist, unter welchem die Oberfläche längs ihrer Inflexionslinie das allgemeine Niveau schneidet, so ergibt sich:

$$\cos\varepsilon = p,$$

und hiernach hat man für die ganze zwischen den Platten befindliche Fläche:

$$dx = \frac{-z^2 + 2a^2\cos\varepsilon}{\sqrt{4a^4 - (z^2 - 2a^2\cos\varepsilon)^2}}\,dz,$$

wo die Wurzel positiv zu nehmen ist, wenn die positiven x von der Inflexionslinie aus nach der benetzten Platte hin gezählt werden. Hieraus folgt, dass die beiden in der Inflexionslinie zusammenstossenden Theile der Fläche congruent sind und sich nur durch ihre Lage unterscheiden, indem der eine nach oben concav, der andere convex ist. Es folgt ferner, dass die Inflexionslinie in der Mittelebene der Platten liegt, und dass die Erhebung an der einen Platte der Senkung an der anderen gleichkommt. Für diese Erhebung oder Senkung z'' findet man:

$$z'' = a\sqrt{2}\,\sqrt{\cos\varepsilon}.$$

Die Zerlegung des Radicanden in der Differentialgleichung der Oberfläche in Factoren zweiten Grades führt auf die Substitution:

$$z = 2a\cos\tfrac{1}{2}\varepsilon\cos\varphi,$$

wodurch man nach der Integration und gehörigen Bestimmung der Constanten erhält:

$$x = a\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)} - 2a\int_{\varphi}^{\frac{\pi}{2}} \Delta(\varphi)\,d\varphi,$$

wo zu setzen ist:

$$\Delta^2(\varphi) = 1 - c^2\sin^2\varphi, \qquad c = \cos\tfrac{1}{2}\varepsilon.$$

Für den Winkel φ'', welcher sich in dem hier betrachteten speciellen Falle der Ordinate z'' oder der halben Entfernung $x = \frac{1}{2}d$ der Platten zuordnet, hat man:

$$\cos\varphi'' = \frac{\sqrt{\frac{1}{2}}\cos\varepsilon}{\cos\frac{1}{2}\varepsilon}.$$

Wir lassen hier einige Paare zu einander gehöriger Werthe der Grössen $\frac{d}{2a}$ und $\frac{z''}{a\sqrt{2}}$ folgen.

$\frac{d}{2a}$	$\frac{z''}{a\sqrt{2}}$	ε
0,000	0,000	90°
0,196	0,584	70°
0,579	0,801	50°
1,169	0,930	30°
2,341	0,992	10°
∞	1,000	0°

Wie man sieht, nehmen die Niveau-Aenderungen z'' an den inneren Flächen der Platten hier an Grösse zu, wenn die Distanz wächst, während das Umgekehrte in den früher erörterten Fällen eintrat, wo die gedachten Flächen mit der Oberfläche der Flüssigkeit entweder beide den Winkel 0° oder beide den Winkel 180° bildeten.

4. Aenderung des Niveaus einer schweren Flüssigkeit durch einen senkrechten hohlen Kreiscylinder; Gleichgewicht einer isolirten Flüssigkeitssäule in einer senkrechten Röhre.

Die Oberfläche einer flüssigen Masse, deren horizontale Dimensionen unendlich gross seien, wird durch Eintauchen einer senkrechten Röhre mit kreisförmigem Querschnitte in eine Rotationsfläche umgestaltet, deren Axe die Axe der Röhre ist. Wir nehmen diese zur z-Axe und rechnen die z-Coordinaten von dem als eben zu betrachtenden Theile des äusseren Niveaus an, in den sich derjenige Theil der Oberfläche verläuft, der an die äussere Wandung der Röhre anstösst. Für den von der Röhre eingeschlossenen Theil der Oberfläche besteht alsdann die Gleichung:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{z}{a^2},$$

woraus sich ergibt, dass die Oberfläche nach oben hin concav und ganz über dem allgemeinen Niveau befindlich ist, wenn

die Wand der Röhre von der Flüssigkeit benetzt wird; schneidet aber die Oberfläche unter einem stumpfen Winkel in die Fläche der Röhre ein, so ist ihre Oberfläche nach oben hin convex und liegt ganz unterhalb des allgemeinen Niveaus.

Wenn wir jetzt unter x die senkrechte Entfernung von der Axe der Röhre verstehen, so können wir, da wir es mit einer Rotationsfläche zu thun haben, für die letzte Gleichung schreiben:

$$\frac{\frac{d^2z}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}+\frac{\frac{dz}{dx}}{x\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}=\frac{z}{a^2}.$$

Diese Formel ergibt sich aus der Bemerkung, dass bei einer Rotationsfläche der Krümmungshalbmesser des einen Hauptschnittes mit demjenigen der Meridiancurve zusammenfällt, während der Krümmungshalbmesser des anderen Hauptschnittes der Normale der Meridiancurve, bis zum Durchschnitte mit der Rotationsaxe gerechnet, gleich ist. Die vorhergehende Differentialgleichung der Oberfläche lässt sich so umgestalten:

$$d\left\{\frac{x\frac{dz}{dx}}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\}=\frac{xz}{a^2}\,dx.$$

Aus dieser Gleichung lässt sich z als geschlossene Function von x nicht finden; gleichwohl ergibt sich aus derselben leicht das hauptsächlichste Gesetz über die Capillarhebung und Senkung in Röhren. Unter r den Radius der Röhre verstanden, integrire man die letzte Gleichung zwischen den Grenzen 0 und r. Für eine benetzende Flüssigkeit kommt alsdann:

$$r=\frac{1}{a^2}\int_0^r xz\,dx.$$

Hierfür kann man aber, wenn durch V das Volumen der gehobenen Flüssigkeitssäule bezeichnet wird, setzen:

$$V=2\pi a^2 r.$$

Auf demselben Wege findet man für eine Flüssigkeit, welche mit der Wandung der Röhre den Winkel i bildet, wenn V

das Volumen der Röhre ist, das einerseits von dem allgemeinen Niveau, andererseits von der Oberfläche der Flüssigkeit begrenzt ist:

$$V = -2\pi a^2 \cos i \,.\, r.$$

Das in den beiden letzten Gleichungen ausgesprochene Gesetz, wonach das Volumen der durch eine cylindrische Röhre gehobenen oder verdrängten Flüssigkeit unter übrigens gleichen Umständen dem Radius der Röhre proportional ist, hat in zahlreichen Versuchen seine Bestätigung gefunden. Wir wollen von solchen nur einige wenige anführen, die sich auf Röhren beziehen, deren Durchmesser die Grösse der Senkung oder Steigung an einer ebenen Platte nicht übersteigt. Für solche Röhren kann beim Wasser, dessen wir zuerst erwähnen wollen, die Oberfläche als eine Kugelfläche betrachtet werden. Desains *(Recherches sur les phénomènes capillaires; Annales de Chimie et de Physique, 3me série, tome LI)* fand nämlich für Röhren von verschiedenem Radius r für den Unterschied der Erhebung z'' an der Wand und der Erhebung z' des tiefsten Punktes der Fläche, also für den Pfeil des Capillar-Meniscus, die folgenden Werthe, aus denen hervorgeht, dass der Unterschied zwischen der horizontalen und verticalen Halbaxe der gedachten Fläche innerhalb der angegebenen Grenzen gegen den Betrag von z' nur klein ist. Dieser Unterschied wird ausserdem, wie man sieht, um so kleiner, je enger die Röhre ist.

r	$z''-z'$	r	$z''-z'$	r	$z''-z'$
0,0620	0,0589	0,4639	0,3024	0,7830	0,3858
0,2627	0,2218	0,5960	0,3577	1,7500	0,4126

Setzen wir aber für die Oberfläche des Meniscus bei einer benetzenden Flüssigkeit eine Kugelfläche, welche wie jener die Röhrenwand berührt und deren tiefster Punkt in derselben Höhe z' wie der tiefste Punkt des Meniscus liegt, so ergibt sich aus der ersten der obigen Gleichungen für die gehobene Flüssigkeitssäule:

$$2a^2 = r\,(z' + \tfrac{1}{3}r).$$

Dass diese Beziehung in Wirklichkeit nahe besteht, ersehen wir aus der folgenden Tabelle, deren Data den Versuchen

Bède's über Capillarerscheinungen entnommen sind *(Mémoire sur l'ascension de l'eau et la dépression du mercure dans les tubes capillaires; Mém. de l'académie royale des sciences de Belgique, tome XXV).* Bei den Versuchen wurde das Wasser durch Saugen bis ans obere Ende der Capillarröhre gehoben und sein Stand nach 24 Stunden beobachtet.

r	z' bei 13°8 C.	z' bei 13°1 C.	Mittel.	a^2
0,00508	29,740	29,910	29,825	0,0758
0,0111	13,710	13,620	13,665	0,0759
0,0199	7,520	7,500	7,510	0,0748
0,0487	2,990	2,950	2,970	0,0727
0,0621	2,270	2,295	2,282	0,0715
0,1025	1,215	1,270	1,242	0,0654

Im Mittel ergibt sich hieraus $a^2 = 0{,}0727$.

Wir dürfen nicht unterlassen, hier einer scheinbaren Abweichung von dem theoretischen Gesetze zu gedenken. Durch zahlreiche Versuche ist es festgestellt, dass die Capillarerhebung bei benetzenden Flüssigkeiten in einem stärkeren Verhältnisse zunimmt, wenn der Radius abnimmt, als die Theorie es verlangt. Wahrscheinlich muss man dies mit Plateau jedoch dem Umstande zuschreiben, dass die Dicke der benetzenden Schichte bei sehr engen Röhren gegen den Radius der letzteren nicht vernachlässigt werden kann, wie dies in den theoretischen Prämissen angenommen wird.

Um die Depression des Quecksilbers zu bestimmen, stellte Bède über den Niveauunterschied in einem Heber mit zwei senkrechten cylindrischen Schenkeln Messungen an. Denken wir uns einen solchen Heber ursprünglich mit einer flüssigen Masse in Communication, deren horizontale Dimensionen unbegrenzt sind, so leuchtet ein, dass die Flüssigkeit in jedem Schenkel dieselbe Höhe einnimmt, wie wenn der cylindrische Schenkel in die erwähnte Masse für sich eingetaucht wäre. Und da das Gleichgewicht nicht gestört wird, wenn man den Zusammenhang zwischen dem Heber und der anderen Flüssigkeit aufhebt, so folgt, dass der Niveauunterschied in den zwei Schenkeln der Differenz der Depressionen, wie sie beiden Schenkeln entsprechen, gleichkommt. Bei den Versuchen, deren

hier gedacht werden soll, betrug der Radius des einen Schenkels nicht 1 Millimeter, während der des zweiten Schenkels zwischen 7 und 11 Millimeter lag. Um die den letzteren Radien entsprechenden Depressionen zu finden, bemerke man, dass die Depression gefunden werden kann, wenn die Constante $a^2 \cos i$, der Radius, die Höhe und das Volumen des Meniscus bekannt sind. Es sei nämlich h die Höhe eines Cylinders, der an Volumen dem Meniscus gleichkommt und den Radius r hat. Alsdann ist, wenn z', z'' die absoluten Depressionen in der Mitte und am Rande des Meniscus bedeuten, und V das Volumen der verdrängten Flüssigkeit ist:

$$V = r^2 \pi (z'' - h) = -2\pi a^2 \cos i \,.\, r.$$

Hieraus ergibt sich, wenn die Höhe $z'' - z'$ des Meniscus die Grösse h um f übertrifft:

$$z' = -\frac{2a^2 \cos i}{r} - f.$$

Die Grösse f ist für gläserne Röhren von 0,1 bis 6 Centimeter Durchmesser von Danger *(Annales de Chimie et de Physique, 3me série, tome XXIV: Note sur la hauteur des ménisques, que présente la surface du mercure contenu dans les vases en verre)* bei einer Temperatur von 15° C. direct beobachtet worden. Für eine Röhre von 6 Centimetern Durchmesser ergab sich für f der Werth 0,0178, und da für einen solchen Durchmesser z' ohne merklichen Fehler gleich Null gesetzt werden darf, so ergibt sich:

$$-a^2 \cos i = 0{,}0267.$$

Mittelst dieses Werthes lässt sich nun die Depression z' berechnen, die den übrigen von Danger bestimmten Werthen der Grösse f entspricht. Wir erhalten so folgende Reihe für Röhren, deren Radius unter einem Centimeter liegt. Bei noch weiteren Röhren können wir für unsere Zwecke von der Depression ganz absehen.

r	f	z'	r	f	z'
0,1	0,0310	0,5030	0,6	0,0637	0,0253
0,2	0,0486	0,2184	0,7	0,0610	0,0153
0,3	0,0584	0,1196	0,8	0,0570	0,0098
0,4	0,0630	0,0705	0,9	0,0530	0,0063
0,5	0,0643	0,0425	1,0	0,0495	0,0039

Was ferner den Pfeil $z'' - z'$ des Meniscus, der von Null ausgehend mit wachsendem Radius sich der Grenze $a\sqrt{2}\sqrt{1-\sin i}$ nähert, betrifft, so fand Bède bei einigen Röhren aus Glas folgende Werthe:

r	$z''-z'$	r	$z''-z'$
0,0199	0,015	0,1323	0,070
0,0576	0,020	0,1771	0,095
0,1025	0,050	0,2140	0,100

Hiernach wird man für Röhren der hier erwähnten Art keinen erheblichen Fehler begehen, wenn man bei Berechnung des Volumens V annimmt, dass die Oberfläche der Flüssigkeit eine Kugelfläche sei, die in die Wandung der Röhre unter einem Winkel von 135° einschneidet. Ja, man kann für die Genauigkeit der zu erörternden Messungen von der Krümmung der Oberflächen ganz absehen und demgemäss setzen:

$$-2a^2 \cos i = rz'.$$

Diese Relation wird in der That durch die Versuche von Bède, von welchen wir einige hier folgen lassen, verificirt. Die Tabelle enthält die Radien r, R der beiden Schenkel, zwei Reihen von Bestimmungen der Niveaudifferenz D, die Mittelwerthe dieser Differenzen, welche im vorliegenden Falle ohne erheblichen Fehler für die den Radien r entsprechenden Depressionen z' genommen werden können, endlich die Werthe der Grösse $-a^2 \cos i$.

r	R	D bei 16,8 C.	D bei 17,8 C.	z'	$-a^2 \cos i$
0,00492	0,725	10,225	10,155	10,190	0,0251
0,00795	0,875	6,090	....	6,090	0,0242
0,0111	0,750	4,425	4,325	4,375	0,0243
0,0190	0,700	2,565	2,540	2,553	0,0254
0,0466	1,075	1,130	1,075	1,103	0,0257
0,0621	1,075	0,800	0,775	0,788	0,0245

Im Mittel ergibt sich aus Obigem für die Constante $-a^2 \cos i$ der Werth 0,0249.

Wie oben bemerkt wurde, geht die Höhe des Meniscus von Null aus, indem sie mit dem Radius der Röhre an Grösse

zunimmt und schliesslich sich einer festen Grenze, nämlich $a\sqrt{2}\sqrt{1-\sin i}$, nähert. Wir lassen eine Reihe von Bestimmungen dieser Höhe, die von Danger (a. a. O.) herrühren, folgen.

r	$z''-z'$	r	$z''-z'$	r	$z''-z'$
0,15	0,0779	1,00	0,1685	2,5	0,1667
0,25	0,1102	1,5	0,1670	3,0	0,1718
0,50	0,1543	2,0	0,1663		

Ohne erheblichen Fehler wird man die der weitesten Röhre entsprechende Meniscus-Höhe für die erwähnte Grenze nehmen können, und hat alsdann unter Zuziehung der bereits früher für dieselbe Röhre aufgestellten Relation:

$$-a^2 \cos i = 0{,}0267,$$
$$2a^2(1-\sin i) = 0{,}1718^2.$$

Hieraus bestimmt sich für den Randwinkel zwischen Quecksilber und Glas der Werth $147^0\ 12'$.

Die Grösse $a^2 \cos i$, d. i. die auf den Radius Eins reducirte halbe Capillarhebung oder Senkung, zeigt sich von der Temperatur nicht bloss insofern abhängig, als durch letztere die Dichtigkeit der Flüssigkeit geändert wird, es sind vielmehr auch die früher durch o und ω bezeichneten Constanten als Functionen der Temperatur zu betrachten. Aus den hierüber angestellten Versuchen ergibt sich, dass man für das Intervall von 0^0 bis 100^0 setzen kann:

$$z_t' = z_0'(1-kt),$$

wo z_0' und z_t' die Hebungen oder Senkungen bedeuten, die bezüglich den Temperaturen 0^0 und t^0 entsprechen, k aber ein von der Natur der Flüssigkeit oder von der Flüssigkeit und ihrem Verhältnisse zum Stoffe der Röhre abhängiger Coefficient ist.

Nach Brunner (Untersuchungen über die Cohäsion der Flüssigkeiten, Poggendorff's Annalen Bd. LXX) ist k für Wasser gleich 0,00187, für Schwefeläther 0,00523 und für Olivenöl 0,00141.

Nach Frankenheim (über die Veränderungen, welche die Höhe des Quecksilbers in Haarröhrchen mit der Tempera-

tur erleidet, Poggendorff's Annalen Bd. LXXV) schwankt der Werth von k beim Quecksilber und für sehr trockenes Glas zwischen $-0{,}0013$ und $-0{,}0014$, so dass bei diesen Stoffen die Grösse $-a^2 \cos i$ durch Zunahme der Temperatur ebenfalls zunimmt, denn der Ausdehnungscoefficient des Quecksilbers beträgt nur 0,00018.

Es möge hier noch der Gleichgewichtszustand einer flüssigen Masse betrachtet werden, die sich in einer senkrecht gehaltenen Röhre befindet und durch die blosse Wirkung der Capillarkraft am Fallen gehindert wird. Die flüssige Masse befindet sich am unteren Ende der Röhre und muss letztere benetzen, da für eine nicht benetzende Flüssigkeit dieser Gleichgewichtszustand nicht eintreten kann.

Der obere Meniscus der Flüssigkeit ist nach oben hin hohl, er berührt die innere Wand der Röhre und für denselben hat man:

$$K_1 = K_1' + \frac{z - z_1'}{a^2},$$

wo K_1 und z das absolute Krümmungsmaass und die Höhe irgend eines Punktes ist, K_1' und z_1' aber dieselben Grössen für den Scheitel bedeuten.

Der untere Meniscus kehrt, so lange das Volumen der Flüssigkeit noch unterhalb einer gewissen Grösse liegt, seine Höhlung nach unten. Er berührt den inneren Rand des unteren Endes der Röhre, den wir uns zwar in der Richtung eines Axialschnittes sehr stark gekrümmt denken, gleichwohl aber von einer stetig gekrümmten torusartigen Fläche gebildet, die einerseits in die innere Wandung der Röhre übergeht, andererseits die ebene Basis der Röhre berührt. Für die Krümmung des unteren Meniscus hat man bei ähnlicher Bezeichnung wie oben:

$$K_2 = K_2' + \frac{z - z_2'}{a^2}.$$

Wenn nun das Volumen der Flüssigkeit vermehrt wird, so steigt der obere Meniscus in die Höhe, während der untere Meniscus sich abflacht und den Kreis, in welchem er den unteren Rand berührt, hinabdrückt. Ein ausgezeichneter Fall

tritt ein, wenn der untere Meniscus in die Ebene übergeht, welche die untere Basis der Röhre bildet. Alsdann ist offenbar im Hinblick auf das Frühere das Verhalten der in der Röhre befindlichen Säule genau dasselbe, wie wenn die Röhre nach unten hin fortgesetzt und in einer unbegrenzten flüssigen Masse von derselben Natur, wie die betrachtete, eingetaucht wäre, deren Niveau mit der ursprünglichen Basis der Röhre zusammenfällt. Die Höhe des oberen Meniscus über das untere Ende der Röhre kommt also der der Röhre entsprechenden Capillarerhebung gleich.

Wird das Volumen der Flüssigkeit weiterhin vermehrt, so steigt der obere Meniscus auch ferner noch. Der untere Meniscus aber wird jetzt nach unten hin convex und berührt den äusseren Rand des unteren Endes, den wir uns als ebenso beschaffen denken, wie den inneren Rand, und der einen stetigen Uebergang von der Basis zur äusseren Wand der Röhre bildet. Für die absolute Krümmung des unteren Meniscus hat man jetzt:

$$K_2 = K_2' + \frac{z_2' - z}{a^2},$$

woraus folgt, dass das Krümmungsmaass vom Scheitel aus abnimmt, umgekehrt, wie dies am oberen Meniscus der Fall ist. Der Scheitel des unteren Meniscus senkt sich desto mehr, je grösser das Volumen der Flüssigkeit wird; zugleich hebt sich der Kreis, in dem er die Randfläche berührt, und wächst der Winkel, den die Tangentialebene des Meniscus in den Punkten jenes Kreises mit dem Horizonte bildet.

Eine Grenzlage für die hier erörterten Gleichgewichtszustände tritt nun endlich ein, sobald die Tangentialebene am Rande des Meniscus senkrecht zu stehen kommt und folglich die äussere Wand der Röhre berührt. Sobald diese Grenze erreicht ist, wird eine Vermehrung des Volumens zur Folge haben, dass der bei Weitem grösste Theil der Flüssigkeit sich als Tropfen von der Röhre ablöst, worauf dann der noch übrig bleibende Theil in einen der früher erwähnten Gleichgewichtszustände zurücktritt.

Um über die hier erwähnten Gleichgewichtszustände nähe-

ren Aufschluss zu erhalten, wollen wir die allgemeine Variationsformel:

$$o\delta O + \omega\delta\Omega + s\delta\int z dk = 0,$$

in welcher hier $\omega = -o$ zu setzen ist, auf den Fall anwenden, wo der untere Meniscus noch den inneren Rand der Röhre berührt und folglich nach unten hin concav ist. Es berühre derselbe die Fläche des stark gekrümmten Randes in einem Kreise C_2 mit dem Radius r_2, während der Kreis, in dem der obere Meniscus die innere Wand der Röhre berührt, C_1 und sein Radius, d. i. der innere Radius der Röhre, r_1 sei. Endlich mögen die beiden Menisken in der Gleichgewichtslage M_1 und M_2 heissen.

Es werde nun, was statthaft ist, die Flüssigkeit so variirt, dass sie nach oben hin gerückt wird und jeder der neuen Menisken M_1' und M_2' allenthalben um gleich viel höher, als die betreffenden ursprünglichen Menisken liegen. Der neue Meniscus kann dann, abgesehen von der Begrenzung, durch blosse Verschiebung in der Richtung des Lothes mit dem betreffenden ursprünglichen Meniscus zur Deckung gebracht werden. Die Kreise, in denen die Wand der Röhre von den Flächen M_1', M_2' geschnitten wird, seien C_1', C_2'. Endlich werde noch durch den Kreis C_2' ein senkrechter Cylinder gelegt und der Durchschnitt desselben mit M_2 durch D_2 bezeichnet.

Die Variation von O besteht dann in dem negativ genommenen Inhalte des zwischen C_2 und D_2 liegenden Ringes. Die Variation von Ω besteht erstlich aus dem positiv genommenen Inhalte des zwischen C_1 und C_1' liegenden Ringtheiles der Röhrenwand, und zweitens aus dem negativ genommenen Inhalte des zwischen C_2 und C_2' liegenden Ringtheiles derselben Wand. Hiernach ist, wenn wir die gedachten Flächen durch ihre Grenzkreise bezeichnen:

$$o\delta O + \omega\delta\Omega = o\,(-C_2D_2 + C_2C_2' - C_1C_1').$$

Bezeichnen wir aber den Winkel, welchen die Tangentialebene des unteren Meniscus am Rande desselben mit dem Horizonte bildet, durch Θ, so ist, wie leicht einzusehen:

$$C_2C_2' - C_2D_2 = C_2'D_2 \cdot \sin\Theta,$$

wenn durch $C_2' D_2$ die Oberfläche des durch C_2' und D_2 begrenzten Hülfscylinders bezeichnet wird. Drückt man nun endlich noch die Grössen $C_1 C_1'$ und $C_2' D_2$ durch die Radien r_1, r_2, und die Entfernungen δh_1, δh_2 der Menisken M_1, M_1' und M_2, M_2' aus, so kommt:

$$o\,\delta O + \omega\,\delta\Omega = 2\pi\, o\,(r_2 \sin\Theta \,.\, \delta h_2 - r_1\,\delta h_1).$$

Was den dritten Theil der Variationsformel betrifft, so hat man, wie leicht einzusehen:

$$\delta \int z\, dk = V_1\,\delta h_1 - V_2\,\delta h_2,$$

wenn V_1, V_2 die Volumina der beiden Räume sind, welche nach oben hin durch je einen der Menisken, nach unten hin durch die Ebene begrenzt werden, von der aus die z-Coordinaten gerechnet werden, und endlich als seitliche Grenzen die senkrechten Cylinder aufweisen, welche durch die Umringe der beiden Menisken gehen. Bemerken wir nun endlich noch, dass, weil das Volumen der Flüssigkeit durch die Variation nicht geändert werden soll,

$$r_1^2\,\delta h_1 - r_2^2\,\delta h_2 = 0$$

ist, so erhalten wir durch Substitution der obigen Ausdrücke in die Variationsformel folgende Relation:

$$2\pi a^2 (r_2 r_1^2 \sin\Theta - r_1 r_2^2) + (V_1 r_2^2 - V_2 r_1^2) = 0.$$

Diese Gleichung bleibt, wie leicht zu ersehen, auch noch gültig für den Fall, dass der untere Meniscus den äusseren Rand der Röhre berührt, wenn dann Θ negativ genommen wird.

Wenn, wie dies meist der Fall ist, der Krümmungsradius für die Meridianlinie des unteren Randes der Röhre gegen die übrigen Dimensionen verschwindet, so kommt, wenn v_1 das Volumen der Röhre zwischen der Basis und dem oberen Meniscus, v_2 das Volumen des unteren Meniscus und v das Volumen der Flüssigkeit ist, erstlich für den Fall, dass letzterer nach unten hin hohl ist und folglich den inneren Rand berührt:

$$v = v_1 - v_2 = 2\pi a^2 r_1 (1 - \sin\Theta),$$

wo r_1 den inneren Halbmesser der Röhre bezeichnet. Und wenn zweitens der untere Meniscus den Rand der äusseren Röhrenwand berührt und folglich nach unten hin convex ist, so hat man:

$$\frac{v_1 - 2\pi a^2 r_1}{r_1^2} + \frac{v_2 + 2\pi a^2 r_2 \sin\Theta}{r_2^2} = 0,$$

wo jetzt r_2 den äusseren Halbmesser der Röhre bezeichnet und Θ zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$ liegt. Aus letzterer Gleichung ersehen wir, dass, wenn r_1 gegen r_2 verschwindet, der Stand der Flüssigkeit im Inneren der Röhre derselbe ist, wie wenn letztere sich nach unten hin innerhalb einer Flüssigkeit fortsetzte, für die der ebene Theil des Niveaus in der Höhe der ursprünglichen Basis der Röhre liegt. Ferner ergibt sich für eine Röhre, deren Wand so dünn ist, dass die Radien r_1 und r_2 sich nur um Unmerkliches von einander unterscheiden:

$$v = v_1 + v_2 = 2\pi a^2 r_1 (1 - \sin\Theta).$$

Den Uebergang von dem ersten Falle zu dem letzten bildet der, wo der untere Meniscus eben ist und mit der Basis der Röhre zusammenfällt. Alsdann ist, wie die eine und die andere der obigen Formeln liefert:

$$v_1 = 2\pi a^2 r_1.$$

Eine vollständige Bestimmung ergibt sich aus dem Obigen für Röhren, deren äusserer Radius so klein ist, dass sowohl der obere, als auch der untere Meniscus durch eine Sphäre ersetzt werden darf. Für solche findet man insbesondere, wenn Θ die Grenze $-\frac{\pi}{2}$ erreicht, die Höhe h des oberen Meniscus über der Basis der Röhre, wie folgt, ausgedrückt:

$$h = 2a^2\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - \tfrac{1}{3} r_1 - \tfrac{2}{3} r_2.$$

Wenn eine Röhre in eine benetzende Flüssigkeit getaucht und hierauf wieder senkrecht herausgehoben wird, so kann sich ein Theil der Flüssigkeit oberhalb des äusseren oder inneren Randes in Gestalt eines ringförmigen Wulstes anhäufen, der durch die Wirkung der Capillarität am Fallen gehindert wird. Betrachten wir nur den an der äusseren Wand befindlichen Wulst, welcher auch an massiven Stäben vorkommen kann. Sein Meridian berührt den äusseren Rand und erhebt sich, indem er diesen verlässt, bis er an einer Stelle das Maximum der Entfernung von der Wand erreicht hat. Hierauf nähert

er sich wiederum der letzteren und bleibt dabei wie vorher nach aussen hin convex, bis zu einem Inflexionspunkte. Ueber diesen Inflexionspunkt hinaus ist der Meridian nach aussen hin concav bis zu dem Punkte, in dem er sich berührend an die Wand anschliesst. Allermeist tritt der gedachte Wulst bei der oben angegebenen Erzeugung zugleich mit dem an der Basis hängenden convex-convexen Meniscus auf, und bilden beide Theile an dem Rande, wo sie sehr nahe zusammenkommen, mit dem Horizonte merklich denselben Winkel, so dass die Oberfläche des einen als Fortsetzung der des anderen erscheint. Für das Volumen des Wulstes findet man durch ähnliche Betrachtungen, wie sie oben angestellt wurden:

$$v = 2\pi a^2 r\,(1 + \sin\Theta),$$

wo r der Radius des Randes, Θ der zwischen 0 und $-\frac{\pi}{2}$ gelegene Winkel ist, welchen die Tangentialebene des Wulstes mit dem Horizonte bildet. Zwischen dem Wulste und dem unteren Meniscus findet durch die Flüssigkeit, welche den Rand benetzt, ein Zusammenhang statt, und die von der äusseren Wand langsam herabfliessende Flüssigkeit vermehrt das Volumen des Meniscus, der absolute Werth von Θ wächst, und wenn er sein Maximum erreicht, erreicht auch das Volumen des Meniscus sein Maximum, während zugleich der Wulst verschwindet.

5. Tropfen einer schweren Flüssigkeit auf einer horizontalen Unterlage.

Eine schwere Flüssigkeit, die sich auf einer horizontalen Unterlage befindet, welche von der Flüssigkeit nicht benetzt wird, nimmt unter regelmässigen Verhältnissen die Gestalt eines Tropfens an, der von einer convex-convexen Rotationsfläche mit verticaler Axe begrenzt wird. Die Fläche schneidet unter dem constanten Randwinkel i in die zur Unterlage dienende Ebene ein.

Rechnen wir die z-Coordinaten von der Unterlage an und bezeichnen die grösste z-Coordinate, d. i. die des Scheitels,

durch z', sowie den Krümmungsradius im Scheitel durch R', so hat man dem Früheren zufolge:

$$\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=\frac{2}{R'}+\frac{z'-z}{a^2}.$$

Indem wir diese Gleichung in ähnlicher Weise wie in dem vorhergehenden Probleme behandeln, finden wir, wenn V das Volumen des Tropfens und x_0 den Radius des Parallelkreises bedeutet, in dem die Oberfläche von der Unterlage geschnitten wird:

$$V=z'x_0^2\pi-2a^2\pi x_0\left(\sin i-\frac{x_0}{R'}\right),$$

woraus sich ergibt:

$$a^2=\frac{x_0^2z'-\frac{V}{\pi}}{2x_0\left(\sin i-\frac{x_0}{R'}\right)}.$$

Diese Formel wollen wir auf einen Versuch anwenden, welchen Quincke (siehe Poggendorff's Annalen Bd. CV) an einem Quecksilbertropfen machte, der in einem luftverdünnten Raume auf einer horizontalen Glasplatte lag. Der Versuch wurde bei 17°,1 C. angestellt. Das specifische Gewicht des angewandten Quecksilbers war bei 0° gleich 13,595, also bei der Temperatur des Versuches gleich 13,593; der Tropfen wog 27,8452 Gramm. Sein Randwinkel wurde gleich 128° 36′ gefunden. Ferner ergab sich $z'=0{,}3655$, $x_0=1{,}399$, und für die der letzteren Abscisse zugehörige Höhe z'' des oberen Theiles des Tropfens wurde der Werth 0,1799 erhalten. Ueberdies wurde der Radius des grössten Parallelkreises, des Aequators, zu 1,4355 und seine Höhe zu 0,0872 bestimmt. Was den Krümmungsradius R' betrifft, so leuchtet ein, dass er grösser sein muss, als der Radius einer Kugel, welche den Tropfen im Scheitel berührt und durch den in der Höhe z'' liegenden Parallelkreis geht. Es hat aber der Radius dieser Kugel den Werth 5,458. Hiernach liegt die Grösse $\frac{x_0}{R'}$ zwischen den Grenzen 0 und 0,2563. Diesen beiden Grenzen entsprechend bestimmen sich mit Hülfe der obigen Formeln und bei Zu-

grundelegung der durch den Versuch gelieferten Data folgende zwei Werthe für die Grösse $-a^2 \cos i$:

$$0{,}0181, \quad 0{,}0269.$$

In der That schliessen diese Grenzen die Werthe der fraglichen Constante ein, wie sie sich aus den bisher besprochenen Versuchen bestimmten.

Die Höhe eines Tropfens nähert sich von Null ausgehend mit wachsendem Volumen schliesslich einer constanten Grenze. Letztere Grenze ist die Höhe, in welcher der ebene Theil der Oberfläche einer unendlich grossen flüssigen Masse liegt, welche auf einer horizontalen Unterlage so ausgebreitet ist, dass sie diese Unterlage im Endlichen längs einer geraden Linie schneidet. Rechnen wir wieder die z-Coordinaten von der Unterlage an und legen wir die x-Axe senkrecht zur Durchschnittslinie der Oberfläche und der Unterlage, so erhält man für die Differentialgleichung jener cylindrischen Fläche:

$$\frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} = \frac{z'-z}{a^2},$$

wo z' die Höhe der Horizontalebene ist, der sich die Oberfläche asymptotisch nähert oder, was dasselbe ist, die Grenze, welcher sich die Höhe eines Tropfens nähert. Von der gebrochenen Potenz ist der negative Werth für den nach oben hin convexen Theil der Oberfläche zu nehmen; das entgegengesetzte Zeichen tritt auf für denjenigen Theil der Fläche, welcher zwischen der Unterlage und dem äussersten Rande der Flüssigkeit liegt. Aus obiger Gleichung ergibt sich nach gehöriger Bestimmung der Integrations-Constante:

$$\cos\varphi = 1 - \frac{(z'-z)^2}{2a^2},$$

wo φ von den beiden Winkeln, die eine Tangentialebene mit der Unterlage bildet, denjenigen bezeichnet, zwischen dessen Schenkeln sich die Flüssigkeit befindet. Aus letzterer Gleichung findet man für die Höhe des ebenen Theiles des Niveaus:

$$z' = a\sqrt{2}\sqrt{1-\cos i}.$$

Ferner ergibt sich für den Unterschied der Höhen zwischen dem ebenen Theile des Niveaus und dem äussersten Rande der Flüssigkeit:

$$z' - z''' = a\sqrt{2},$$

welcher Ausdruck natürlich mit der Grenze für den Pfeil des Capillarmeniscus in einer Röhre bei einer Flüssigkeit zusammenfällt, die mit der Röhrenwand den Randwinkel 0^0 oder 180^0 bildet.

Die obigen Formeln können ohne merklichen Fehler bei Quecksilbertropfen in Anwendung gebracht werden, deren Aequatorradius ein halbes Decimeter übersteigt. Bei einem Tropfen von solcher Grösse, der sich in freier Luft auf einer Unterlage aus Glas befand, gelangte Quincke (a. a. O.) zu den folgenden Resultaten:

Gewicht in Grammen.	Aequator-radius.	z'	$z' - z'''$	Temperatur.
369,18	5,18	0,3498	0,2659	18°6

Mittelst der obigen Formeln berechnet man hieraus für i den Werth $136^0\ 56'$ und für die Constante $-a^2 \cos i$ den Werth 0,0258. Endlich kommt $o = 0{,}481$.

III.

Modification des hydrostatischen Druckes durch Capillarwirkung; Anziehungs- und Abstossungserscheinungen bei zwei in einer Flüssigkeit schwimmenden Körpern.

---

1. Modification des hydrostatischen Druckes durch Capillarwirkung.

Die Oberfläche eines festen Körpers, der in eine schwere Flüssigkeit eingetaucht ist, erleidet, wofern zwischen dem Körper und der Flüssigkeit keine Wirkung stattfindet, einen vertical aufwärts gerichteten Druck, welcher dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit das Gleichgewicht halten würde. Dieses Gesetz bedarf einer Modification, sobald zwischen dem Körper und der Flüssigkeit Capillarkräfte thätig sind. Um über diese Kräfte mittelst der an die Spitze unserer Untersuchungen gestellten Variationsformel Aufschluss zu erhalten, betrachten wir zunächst den Gleichgewichtszustand, der unter den im Folgenden angegebenen Verhältnissen eintritt.

Ein fester Kreiscylinder werde senkrecht in eine flüssige, jenen benetzende Masse, deren horizontale Dimensionen unendlich gross sind, eingetaucht und hierauf senkrecht wieder herausgehoben. An der unteren Basis des Cylinders bleibt alsdann, selbst wenn jene bereits über den als eben zu betrachtenden Theil des Niveaus gehoben worden, jedoch noch nicht eine gewisse Grenzhöhe erreicht hat, Flüssigkeit hängen,

und durch die Wirkung einer in der Axe des Körpers thätigen Kraft kann ein Gleichgewichtszustand erzielt werden. Die Oberfläche der Flüssigkeit ist eine Revolutionsfläche, deren Axe mit der des Cylinders zusammenfällt. Ihre Meridiancurve berührt den unteren Rand des Cylinders, den wir uns als sehr stark gekrümmt denken, und sie ist in allen ihren Punkten nach aussen hin hohl. Ferner wird sich ergeben, dass die Entfernung der gedachten Curve von der Axe abnimmt, wenn man von dem Rande des Cylinders abwärts schreitet, in einem äquatorialen Einschnürungskreise ein Minimum erreicht, und hierauf wieder zunimmt, indem die Curve sich asymptotisch dem allgemeinen Niveau nähert. Zur leichteren Bezeichnung möge der obere Rand der Oberfläche, d. i. der Kreis, in dem sie den Rand des Cylinders berührt, K heissen, sein Radius r, seine Höhe über dem allgemeinen Niveau h; θ sei der Winkel, den hier die Meridiancurve mit der Horizontalebene bildet. Der Einschnürungskreis heisse A, sein Radius x_0, seine Höhe über dem Niveau z_0. Ein senkrechter Cylinder, der durch A gelegt wird, schneide die Ebene des Niveaus im Kreise A', und ein eben solcher durch den Rand K gelegter Cylinder schneide die Oberfläche der Flüssigkeit in K', das Niveau in K''. Der im Niveau gelegene unendlich grosse Grenzparallelkreis der Oberfläche heisse J.

Für die Oberfläche hat man dem Früheren zufolge, wenn der Durchschnitt der Cylinderaxe mit dem Niveau zum Coordinatenanfangspunkte gemacht wird:

$$d\left\{\frac{x\frac{dz}{dx}}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\} = \pm\frac{xz}{a^2}dx,$$

wo die gebrochene Potenz positiv zu nehmen ist und rechts das obere Vorzeichen für die Fläche $JK'A$, das untere aber für AK gilt. Durch Integration findet man:

$$\frac{\text{Vol. } JA'A}{2a^2\pi} = x_0,$$

$$\frac{\text{Vol. } A'AKK''}{2a^2\pi} = x_0 - r\sin\theta.$$

Hieraus ergibt sich für das Volumen der gesammten über dem allgemeinen Niveau befindlichen Flüssigkeit:

$$V = r^2 h\pi + 2a^2 r\pi \sin\theta - U,$$

unter U denjenigen Theil des Cylinders verstanden, welcher zwischen der Ebene K und der Basis liegt.

Wenn die Querdimensionen der Fläche, welche die Basis des Cylinders mit der Mantelfläche desselben verbindet, gegen die übrigen Dimensionen verschwinden, so kommt einfach:

$$V = r^2 h\pi + 2a^2 r\pi \sin\theta.$$

Wenn der Radius des Cylinders sehr gross ist und somit die Krümmung in der Richtung der Parallelkreise gegen die in der Meridianebene vernachlässigt werden kann, ergibt sich natürlich für die Meridiancurve wesentlich dieselbe Gleichung, wie für den Hauptschnitt der durch die Capillarwirkung einer senkrechten Platte erzeugten Oberfläche, nämlich:

$$x - x_0 = \sqrt{4a^2 - z_0^2} - \sqrt{4a^2 - z^2} + a \log \frac{z_0}{z} \frac{\sqrt{4a^2 - z^2} + 2a}{\sqrt{4a^2 - z_0^2} + 2a},$$

wo $z_0 = a\sqrt{2}$ ist. Die durch letztere Gleichung dargestellte Curve, oder vielmehr der über dem Niveau befindliche Zweig, nähert sich, wenn z von Null ausgeht und an Grösse zunimmt, der Axe, und kommt ihr im Punkte (x_0, z_0) am nächsten; hierauf entfernt sie sich wieder von derselben und erreicht ihre grösste Entfernung in einem Punkte, dessen Coordinaten folgende sind:

$$z = 2a, \quad x = x_0 + a\,[\sqrt{2} - \log(1 + \sqrt{2})].$$

In diesem höchsten Punkte läuft die Tangente horizontal und bricht die Curve ab. Die Werthe der Grösse h liegen also bei Platten oder Cylindern von grossem Radius zwischen $a\sqrt{2}$ und $2a$, während die entsprechenden Werthe von θ zwischen $\frac{\pi}{2}$ und 0 liegen.

Nach den über die Oberfläche gewonnenen Aufschlüssen schreiten wir jetzt zur Bestimmung der Kraft fort, die an dem Cylinder thätig sein muss, wenn das Gleichgewicht bestehen soll. Zu dem Ende müssen wir zu der Variationsformel zurückgehen, die uns als Ausgangspunkt diente, indem die beiden

aus letzterer gewonnenen Gleichungen für die Oberfläche auch nur über letztere Aufschluss zu geben im Stande sind.

Die am Cylinder wirkende, in die Axe fallende Kraft, welche den Capillarkräften das Gleichgewicht hält, werde durch P bezeichnet und als positive Grösse eingeführt, wenn sie in der der Schwere entgegengesetzten Richtung wirkt. Man hat alsdann dem Früheren zufolge im Falle des Gleichgewichtes:

$$P\delta p - o\,\delta O - \omega\,\delta\Omega - s\,\delta\int z\,dk = 0.$$

Es werde aber das System so variirt, dass der Cylinder um die Grösse δh nach unten hin verschoben wird, die Oberfläche der Flüssigkeit aber um $\delta h'$ nach oben hin. Da hierdurch das Volumen der Flüssigkeit nicht geändert werden darf, so hat man zur Bestimmung des Verhältnisses zwischen δh und $\delta h'$, wie man leicht einsieht:

$$r^2\pi\,\delta h = \left(\int df' - \int df''\right)\delta h',$$

wo df' und df'' die Projectionen der Elemente der Oberfläche der Flüssigkeit auf die Niveauebene bezeichnen und das erste Integral sich über die Elemente des zwischen A' und J gelegenen Theiles der Niveauebene erstreckt, während das zweite sich über den Theil ausdehnt, der von den Kreisen A' und K'' begrenzt wird. Der letzte Ausdruck lehrt aber, dass die lineare Variation $\delta h'$ gegen δh verschwindet, und daher kann für die Bestimmung der Variationen von O und Ω die neue Oberfläche als mit der ursprünglichen zusammenfallend gedacht werden. Nun sei L der Kreis, in dem der Cylinder in seiner neuen Lage von der neuen Oberfläche geschnitten wird, und ein durch L gelegter senkrechter Cylinder schneide die Oberfläche des Cylinders in der ursprünglichen Lage im Kreise M. Es ist dann:

$$\delta O = -KL, \quad \delta\Omega = -KM,$$

wenn KL der Theil der ursprünglichen oder neuen Oberfläche ist, welcher von den Kreisen K und L begrenzt wird, sowie KM denjenigen Theil der Oberfläche des Cylinders in der ursprünglichen Lage bedeutet, welcher zwischen K und M liegt. Man hat also:

$$o\,\delta O + \omega\,\delta\Omega = -o\,(KL - KM).$$

Lassen wir aber von den Punkten des Kreises M auf die Oberfläche der Flüssigkeit Perpendikel herab, und bezeichnen den Kreis, in welchem letztere von den Perpendikeln getroffen wird, durch N, so ist:

$$KL - KM = LN,$$

und folglich:

$$o\,\delta O + \omega\,\delta\Omega = -2r\pi\,o\sin\theta\,.\,\delta h.$$

Man hat ferner:

$$\delta\int z\,dk = -\delta h\int z\,df + \delta h'\left(\int z\,df' - \int z\,df''\right),$$

wo das erste Integral rechts sich über den unterhalb K gelegenen Theil des Cylinders und die Projectionen df der Elemente jenes Theiles auf die Niveauebene erstreckt, während die übrigen Integrale dieselben Grenzen, wie die früher aufgeführten Integrale mit df' oder df'' haben, und z sich auf das senkrecht über df' oder df'' befindliche Element der Oberfläche der Flüssigkeit bezieht.

Dem über die letzte Oberfläche früher Gefundenen zufolge ist aber der Coefficient von $\delta h'$ gleich $2a^2\pi r\sin\theta$, so dass das Glied mit $\delta h'$ gegen das mit δh verschwindet; somit kommt:

$$\delta\int z\,dk = -\delta h\,(r^2h\pi - U),$$

wo U wie früher den unterhalb K gelegenen Theil des Cylinders bedeutet. Bemerkt man nun endlich noch, dass die virtuelle Geschwindigkeit der Kraft P gleich $-\delta h$ ist, sowie dass von der Aenderung der benetzten Oberfläche des Gefässes (von unendlich grossen horizontalen Dimensionen) abzusehen ist, so kommt nach Substitution der gewonnenen Ausdrücke in die Variationsformel:

$$P = s\,(r^2h\pi - U) + 2r\pi\,o\sin\theta,$$

oder, wenn wie früher durch V das Volumen der über der Niveauebene befindlichen Flüssigkeit bezeichnet wird:

$$P = s\,V,$$

oder in Worten: die Kraft P hält dem Gewichte der gesammten über der Niveaufläche befindlichen Flüssigkeit das Gleichgewicht. Natürlich muss zu dieser Kraft noch das Gewicht des Cylinders selbst addirt werden.

Die letzte Gleichung gilt offenbar auch dann noch, wenn

der Cylinder so sehr dem Niveau genähert wird, dass die Flüssigkeit über den Rand tritt und die cylindrische Seitenfläche berührt, wobei jedoch die Basis noch über dem Niveau liegen muss. Wenn aber der Körper unter die Niveauebene tritt, so hat man, unter V' das von der Niveauebene abgeschnittene Volumen des Körpers, unter V aber das der gesammten über der gedachten Ebene befindlichen Flüssigkeit verstanden:

$$P = -s(V' - V),$$

wo für den Fall, dass der ganze Rand unter dem Niveau liegt, zu setzen ist:

$$V = 2a^2 r\pi.$$

Es ist alsdann sV' die Grösse des hydrostatischen Druckes, der der Schwere entgegen wirkt, und der in Folge der Capillaritätswirkung um $2sa^2 r\pi = 2r\pi o$ vermindert wird.

Unter den Versuchen, durch welche die Gleichung:

$$P = sV$$

ihre Bestätigung findet, gedenken wir zuerst der von Hagen angestellten. Derselbe brachte einen ringförmigen Hohlcylinder in Anwendung, der aus Guayakholz gedreht war. Der äussere Radius r_1 betrug 1,563, der innere Radius r_2 1,193 Centimeter. Der Ring wurde an einer Waage äquilibrirt; hierauf wurde demselben ein Gefäss mit Wasser von unten her genähert, bis der Ring mit der Oberfläche in Berührung kam. Durch Hebung und Senkung der Flüssigkeit und durch Belasten der Waagschale wurde nun erzielt, dass der Waagebalken horizontal zu stehen kam, während die Flüssigkeit am Ringe hing, und zwar so, dass ihre Oberfläche die äussere und innere cylindrische Fläche des Ringes am unteren Rande berührte, was nahe gleichzeitig stattfinden musste. Für diese Verhältnisse wurde dann endlich das Gewicht G bestimmt, welches der Wirkung der Flüssigkeit auf den Ring das Gleichgewicht hielt. Ausserdem wurde noch für sich an einer kreisförmigen Scheibe von dem Radius 1,563 die Erhebung h der Basis bestimmt, bei welcher die Oberfläche der Flüssigkeit die begrenzende cylindrische Fläche berührt. Für frisches Wasser wurde gefunden:

$h = 0{,}2955$ Centimeter, $G = 1{,}912$ Gramm.

Wenn wir nun aber den für P früher gefundenen Ausdruck auf den vorliegenden Fall ausdehnen und berücksichtigen, dass das mit U bezeichnete Volumen ohne merklichen Fehler vernachlässigt werden darf, so kommt:

$$G = (r_1^2 - r_2^2)\, h\pi + 2\,(r_1 + r_2)\, a^2\pi.$$

Durch Substitution der beobachteten Werthe findet man für a^2 den Werth 0,0557, welcher in der That zwischen den früher aufgeführten Werthen jener Grösse liegt.

Eine weitere Bestätigung des für P abgeleiteten Ausdruckes entnehmen wir den Versuchen Gay-Lussac's *(Poisson, nouvelle théorie de l'action capillaire)* über die Kraft, welche dazu erforderlich ist, eine Platte von der daran haftenden Flüssigkeit abzuziehen. Diese Kraft kommt offenbar dem Maximum unter den Werthen von P gleich, die den verschiedenen Werthen von θ, welches alle Werthe zwischen 0 und $\frac{\pi}{2}$ annehmen kann, entsprechen. Wenn aber der Radius der Platte, gegen die Constante a gehalten, sehr gross ist, so treten in dem Ausdrucke für V die beiden letzten Glieder gegen das erste zurück, so dass das gedachte Maximum sehr nahe dann eintritt, wenn h seinen grössten Werth $2a$ erreicht, was für $\theta = 0$ stattfindet. Dem Früheren zufolge haben wir daher für die fragliche Kraft:

$$P = 2sar^2\pi.$$

Gay-Lussac beobachtete nun beim Wasser, Alkohol und Terpentinöl und bei einer Scheibe von 5,9183^{cm} Radius die in der folgenden Tabelle zusammengestellten Werthe für das erwähnte Maximum. Denselben sind die Werthe der Constante a^2 beigefügt, wie sie sich aus P mittelst der letzten Formel berechnen.

Flüssigkeit.	Spec. Gewicht.	P	a^2
Wasser . .	1,00000	59,40	0,0729
Alkohol . .	0,81961	31,08	0,0297
„ . .	0,85950	32,87	0,0302
„ . .	0,94153	37,15	0,0321
Terpentinöl	0,86946	34,104	0,0318

Die berechneten Werthe von a^2 stimmen in befriedigender Weise mit denjenigen überein, welche aus der Capillarhöhe abgeleitet werden, die Gay-Lussac bei den gedachten Körpern in einer Röhre von 0,06472^{cm} Radius und bei ungefähr ein und derselben Temperatur wie bei den mitgetheilten Messungen, nämlich 8°,5 C. bestimmt hat. Dies ersieht man aus folgender Tabelle.

Flüssigkeit.	Spec. Gewicht.	Capillar-erhebung.	a^2
Wasser . .	1,00000	2,31034	0,0757
Alkohol . .	0,81961	0,91823	0,0304
„ . .	0,85950	0,93008	0,0308
„ . .	0,94153	0,99973	0,0330
Terpentinöl	0,86946	0,90516	0,0329

2. Anziehungs- und Abstossungserscheinungen bei zwei in einer Flüssigkeit schwimmenden Körpern.

Eine besonders interessante Anwendung findet die Theorie der Capillarität auf die Erklärung der Anziehung und Abstossung, die man bei Körpern beobachtet, welche auf der Oberfläche einer und derselben Flüssigkeit schwimmen. Wir wollen hier den speciellen Fall betrachten, wo die beiden Körper zwei senkrechte und parallele Platten von sehr grosser Breite sind und in einer Flüssigkeit schwimmen, deren horizontale Dimensionen sehr gross sind. Die Oberfläche der Flüssigkeit ist dann in dem grösseren Theile der Breite der Platten merklich cylindrisch und fällt nahe mit der Fläche zusammen, die im zweiten Probleme besprochen wurde; von dem nicht cylindrischen Theile der Flüssigkeit kann man absehen.

An der ersten Platte unterscheiden wir die Fläche F_0, welche von der ersten Platte ab- und der einen Hälfte des ebenen Theiles des Niveaus zugekehrt ist, und ferner die Fläche F_1, welche der zweiten Platte zugekehrt ist. An der ersten Fläche steige die Oberfläche der Flüssigkeit bis zur Höhe z_0 über die Niveauebene und schneide in die Platte unter dem spitzen Winkel i_0 ein. Für die Fläche F_1 sei z_1 die

Höhe der Oberfläche und i_1 der Randwinkel. Damit beide Platten im Gleichgewicht bleiben, sind an jeder zwei Kräfte anzubringen, die in der zu den Breitenkanten B senkrechten Mittelebene der beiden Platten liegen. Wir wollen uns hier damit begnügen, die Summe der horizontalen Componenten jener zwei Kräfte für die erste Platte zu bestimmen. Diese Summe sei P und werde in der Richtung von der zweiten Platte zur ersten positiv gerechnet; sie wird gefunden, wenn wir eine Variation an dem Systeme vornehmen, wodurch die erste Platte der zweiten genähert oder von ihr entfernt wird, während letztere ungeändert bleibt. Für eine solche Variation ist, wenn δx die Grösse bedeutet, um welche die Distanz der Platten vermindert wird:

$$P\delta x + \Sigma o\, \delta O + \Sigma\omega\, \delta\Omega + \Sigma\omega'\, \delta\Omega' + s\, \delta \int z\, dk = 0,$$

wo sich ω und Ω auf die erste, ω' und Ω' auf die zweite Platte beziehen.

Was die Variation der flüssigen Masse betrifft, so werde die neue Oberfläche zwischen den Platten dadurch erhalten, dass man die ursprüngliche Oberfläche senkrecht nach oben um δh verschiebt. Die auf der Seite von F_0 gelegene Flüssigkeit werde durch die ursprüngliche Oberfläche und ausserdem durch das unendlich schmale Band begrenzt, welches erhalten wird, wenn man die ursprüngliche Oberfläche nach der Fläche F_0 in ihrer neuen Lage hin in der Richtung der Tangentialebene ihres höchstgelegenen Randes verlängert. Die jenseits der zweiten Platte gelegene Flüssigkeit bleibe ungeändert.

Wie man leicht findet, ist alsdann für die auf der Seite der ersten Platte befindliche äussere Flüssigkeit:

$$\delta O = \frac{B}{\sin i_0}\delta x, \quad \delta\Omega = \frac{B\cos i_0}{\sin i_0}\delta x;$$

für die von den Platten eingeschlossene Flüssigkeit hat man:

$$\delta O = -\frac{B}{\sin i_1}\delta x, \quad \delta\Omega = -\frac{B\cos i_1}{\sin i_1}\delta x + B\delta h,$$

$$\delta\Omega' = B\delta h,$$

und für die ausserhalb der Platten auf der Seite der zweiten befindliche Oberfläche der Flüssigkeit verschwinden die Variationen.

Es ergibt sich ferner für den auf der Seite von F_0 gelegenen Theil der äusseren Flüssigkeit, wenn die z-Coordinaten von der Niveauebene aufwärts gerechnet werden:

$$\delta \int z\, dk = B\, \delta x \int_0^{z_0} z\, dz = \tfrac{1}{2} B z_0^2\, \delta x.$$

Für den Theil der Flüssigkeit zwischen den beiden Platten hat man:

$$\delta \int z\, dk = \delta h \int_0^{z} z\, df - B\, \delta x \int_0^{z_1} z\, dz = V\, \delta h - \tfrac{1}{2} B z_1^2\, \delta x,$$

wenn df die Projection eines Elementes der Oberfläche der zwischen den Platten befindlichen Flüssigkeit auf die Niveauebene und V das Volumen der zwischen den Platten über der Niveauebene gelegenen Flüssigkeit bezeichnet. Im Falle einer Depression der Flüssigkeit ist für V das negativ genommene Volumen des Raumes zu nehmen, der nach oben durch die Niveauebene, nach unten durch den unter dem Niveau gelegenen Theil der Flüssigkeits-Oberfläche begrenzt wird.

Für den dritten Theil der Flüssigkeit verschwindet die Variation des Schwerpunktsmomentes $\int z\, dk$.

Die Grössen δx und δh sind von einander abhängig, da das Volumen der Flüssigkeit durch die Variation nicht geändert werden darf, und zwar hat man, unter d die Entfernung der Platten verstanden:

$$(z_1 - z_0)\, \delta x = d\, \delta h.$$

Man bemerke noch, dass dem Früheren zufolge für die Flächen F_0 und F_1 folgende Relationen bestehen:

$$o \cos i_0 + \omega = 0, \qquad o \cos i_1 + \omega_1 = 0.$$

Nach allem Vorhergehenden findet man jetzt durch Substitution in die Variationsformel:

$$P = \tfrac{1}{2} s B \left[z_1^2 - z_0^2 + 2a^2 (\sin i_1 - \sin i_0) \right]$$
$$- \frac{z_1 - z_0}{d} \left[s V + (\omega + \omega') B \right].$$

Das letzte Glied dieser Formel verschwindet in allen Fällen, weil sein letzter Factor verschwindet. Hiervon kann man sich

überzeugen, indem man mit Hülfe der Differentialgleichung erster Ordnung für die Oberfläche zwischen den Platten die Grösse V berechnet. Unmittelbarer ergibt sich jene Beziehung, wenn man bemerkt, dass der Ausdruck:

$$-[sV+(\omega+\omega')B]\,\delta h$$

die Summe der virtuellen Momente für eine Variation ist, wobei die Oberfläche der Flüssigkeit zwischen den Platten um δh gehoben wird, während die Oberfläche ausserhalb der Platten dem entsprechend gesenkt wird. Jene Summe muss aber verschwinden. Es ist also:

$$P=\tfrac{1}{2}sB\,[z_1^2-z_0^2+2a^2(\sin i_1-\sin i_0)].$$

Wir wollen jetzt diese Formel auf einige einfachere Fälle anwenden.

Hat man es erstlich mit einer einzelnen Platte zu thun, so verschwindet P, weil sein letzter Factor in Folge der Differentialgleichung erster Ordnung für die Capillarfläche verschwindet. Die Wirkung der Capillarkräfte auf eine einzelne senkrecht eingetauchte Platte lässt sich hiernach durch ein Gegenpaar ersetzen, dessen Ebene auf den Breitenkanten senkrecht steht; es erleidet aber die Platte keinen horizontalen Zug. Das Moment des gedachten Gegenpaares lässt sich durch eine Variation bestimmen, wobei die Platte um eine den Breitenkanten parallele Axe gedreht wird.

Bei zwei Platten, deren Flächen sämmtlich von der Flüssigkeit benetzt werden, hat man zu setzen:

$$\omega=\omega'=-o \quad \text{und} \quad i_0=i_1=0.$$

Ferner findet man dem Früheren zufolge:

$$z_1^2=z_0^2+z'^2,$$

wo z' die Erhebung der tiefsten Seite der cylindrischen Fläche über das Niveau bedeutet, welche die Flüssigkeit zwischen den beiden Platten nach oben begrenzt. Hiernach hat man:

$$P=\tfrac{1}{2}sBz'^2.$$

Jede der Platten erleidet hiernach in Folge der Capillarkräfte dieselbe Wirkung in horizontaler Richtung, wie wenn auf dieselbe eine auf ihr senkrechte Kraft wirkte, die sie der anderen Platte zu nähern strebt. Die Grösse dieser Kraft ist dem

Quadrate der Capillarerhebung zwischen den Platten proportional, folglich, wenn die Entfernung der Platten sehr klein ist, umgekehrt proportional mit dem Quadrate dieser Entfernung.

Dieselbe Art der Wirkung, wie die im vorhergehenden Falle erörterte, findet statt, wenn keine Fläche der Platten von der Flüssigkeit benetzt wird. Auch ist die Grösse der Horizontalkraft dieselbe, wofern sämmtliche Flächen von der Flüssigkeit berührt werden. Man hat alsdann nämlich:

$$\omega = \omega' = o, \quad i_0 = i_1 = 180^0.$$

Nehmen wir endlich noch an, dass der Randwinkel für die Flächen der ersten Platten 0 und für die der zweiten 180^0 betrage, so dass alsdann die erste Platte benetzt wird, die zweite aber von der Oberfläche der Flüssigkeit zwar berührt, aber von letzterer nicht benetzt wird. Alsdann ist für die erste Platte:

$$i_0 = i_1 = 0,$$

wonach man, unter ε den Winkel verstanden, welchen die von den Platten eingeschlossene Oberfläche in ihrer Inflexionslinie mit dem Horizonte bildet, findet:

$$P = -sB(1 - \cos\varepsilon)\,a^2.$$

Die Capillarwirkung sucht also die erste Platte von der zweiten zu entfernen, und ein Gleiches ergibt sich für die Wirkung auf die zweite Platte. Die Grösse der Kraft, welche die eine und andere Platte in horizontaler Richtung zu bewegen sucht, nähert sich, wie das Frühere ersehen lässt, dem Maximum sBa^2, wenn die Entfernung abnimmt, während sie sich mit wachsender Entfernung der Platten der Grenze Null nähert.

IV.

Gleichgewicht eines Systemes, das aus zwei Flüssigkeiten und einem festen Körper zusammengesetzt ist.

1. Allgemeine Betrachtungen.

Die Variationsformel, welche wir zu Anfang für das Gleichgewicht einer Flüssigkeit und eines festen Körpers aufgestellt haben, lässt sich leicht für den Fall verallgemeinern, dass eine zweite Flüssigkeit zu jenen beiden Körpern hinzutritt, von der natürlich vorausgesetzt wird, dass sie sich mit der ersten Flüssigkeit nicht mischt. An den Oberflächen der Flüssigkeiten sind alsdann drei verschiedene Theile zu unterscheiden. Die freien Theile der Oberflächen seien O und O', die Flächen, auf denen der feste Körper von der einen und anderen Flüssigkeit berührt wird, Ω und Ω', und die Fläche, auf welcher sich die beiden Flüssigkeiten berühren, werde durch T bezeichnet. Es seien ferner P_i und P_i' die äusseren Kräfte, ϱ und ϱ' die Dichtigkeiten, s und s' die specifischen Gewichte für die eine und andere Flüssigkeit, o und o' zwei Constanten, die von der Natur der Flüssigkeiten, ω und ω' zwei Constanten, die von der molecularen Wechselwirkung des festen Körpers und der Flüssigkeiten abhängen, endlich τ eine Constante, die sich durch die Molecularwirkung bestimmt, welche an der Berührungsstelle der Flüssigkeiten eintritt. Man hat alsdann, wenn von dem äusseren Drucke abgesehen wird:

$$\int P_i\,\delta p_i \,.\, \varrho\, dk + \int P_i'\,\delta p_i' \,.\, \varrho'\, dk' - o\,\delta O - o'\,\delta O' - \omega\,\delta\Omega - \omega'\,\delta\Omega' - \tau\,\delta T = 0.$$

Wir werden uns hier zunächst auf die Betrachtung solcher Fälle beschränken, wo die eine Flüssigkeit, wir wollen annehmen die erste, ganz von der anderen umschlossen ist, und wo überdies beide Flüssigkeiten nur der Wirkung der Schwerkraft ausgesetzt sind. Die Flächen O und Ω treten alsdann nicht auf und für die Oberfläche der zweiten Flüssigkeit gelten genau dieselben Gesetze, als ob sie keine andere Flüssigkeit einschlösse, die sich durch Variationen ableiten lassen, wobei die eingeschlossene Flüssigkeit ungeändert bleibt. Hiernach haben wir bloss auf die erste Flüssigkeit unser Augenmerk zu richten, und folglich hat man für solche Variationen, wobei die Oberfläche der zweiten Flüssigkeit ungeändert bleibt, wie sich sogleich aus II. 1 ergibt:

$$\delta\left\{s\int z\,dk + s'\int z'\,dk'\right\} - \tau\,\delta T = 0.$$

In Betreff der Constante τ bemerke man, dass sie verschwindet, wenn sich die zweite Flüssigkeit von der ersten nicht unterscheidet, und dass sie den Werth $o + o'$ annimmt, wenn beide Flüssigkeiten an ihrer Berührungsstelle sich ganz indifferent verhalten.

Mit einem Systeme der oben besprochenen Art hat man es bei einem Quecksilbertropfen zu thun, der im Innern einer flüssigen Masse auf einer festen horizontalen Unterlage ruht, die von der Flüssigkeit ganz benetzt wird.

Der Variationsformel zufolge muss die Tropfenoberfläche die Unterlage im Umfange des Kreises, auf dem der Tropfen ruht, berühren, was auch durch die Beobachtung für den Fall, dass der Tropfen in Wasser sich befindet, bestätigt wird.

Für die Oberfläche des Tropfens ergibt sich eine Differentialgleichung zweiter Ordnung, die sich nur durch den Werth der früher durch a^2 bezeichneten Constante von derjenigen unterscheidet, welche für den Fall gilt, wo der Tropfen sich in einem Gase befindet. An die Stelle von a^2 tritt jetzt der Ausdruck:

$$\frac{\tau}{s - s'} = t^2.$$

Wenn der Aequatorradius des Tropfens immer grösser und grösser wird, so wird sich hiernach die Meridiancurve dem Querschnitte der cylindrischen Capillarfläche mit der Constante t^2 nähern. Als Grenzen für die Höhe z' des Scheitels und die Höhe z''' des Aequators ergeben sich bezüglich:

$$z' = 2t, \quad z''' = t(2 - \sqrt{2}).$$

Für die Grössen z' und z''' fand Quincke (vergl. Poggendorff's Annalen Bd. CV) an einem Quecksilbertropfen von etwa 3^{cm} Radius unter Wasser und bei einer Temperatur von 15°,1 C. folgende Werthe durch Messungen, die um etwa 10 Minuten aus einander lagen:

z'	z'''
0,3492	0,0979
0,3370	0,0977

Die beobachteten Werthe können ohne erheblichen Fehler für die Grenzwerthe der betreffenden Grössen genommen werden, wie solches auch dadurch bestätigt wird, dass sie sich annähernd wie 2 zu $2 - \sqrt{2}$ verhalten. Alsdann findet man bei Zugrundelegung der Werthe von $z' - z'''$ für die Constante t^2 die Werthe 0,0316 und 0,0286, ferner $\tau = 0{,}398$ und 0,361. Derselbe Beobachter fand für z' bei einem Quecksilbertropfen vom Radius 3,94 unter Salzsäure unmittelbar nach dem Auflegen und neun Stunden später bei einer Temperatur von 26°,2 C. die Werthe 0,3514 und 0,3338.

Des Folgenden wegen bemerken wir noch ausdrücklich, dass in dem hier in Rede stehenden Falle, wo die beiden Flüssigkeiten sich nicht mischen, die Constante t^2, und also auch τ, wie sich aus obigen Formeln sogleich ergibt, nothwendig stets positiv ist.

2. Gleichgewichtsflächen einer ruhenden, der Schwerkraft entzogenen Flüssigkeit.

Für die in der letzten allgemeinen Variationsformel auftretende Arbeit der Schwerkraft kann man das Product aus dem Gewichte in die virtuelle Geschwindigkeit des Schwer-

punktes der als ein Ganzes genommenen Flüssigkeiten in der Richtung des Lothes setzen. Dies Product verschwindet, so oft die beiden Flüssigkeiten dasselbe specifische Gewicht haben und bei der vorgenommenen Variation in der Oberfläche der umschliessenden Flüssigkeit keine Aenderung stattfindet. Hiernach verhält sich die eingeschlossene Flüssigkeit gerade so, als ob sie der Schwere ganz entzogen wäre. Ihre Oberfläche kann hierbei ganz frei oder aber zum Theil mit einem Körper in Berührung sein, der mit einer dünnen Schicht derselben Flüssigkeit überzogen ist. Die freien Theile derselben müssen der Gleichung genügen:

$$\delta T = 0,$$

woraus sich sogleich ergibt:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = c.$$

Die Flächen, welche der in Rede stehenden Gleichung genügen, sind entweder Flächen *maximae* oder *minimae areae.* Wie bekannt, lehrt das Princip der lebendigen Kräfte, dass das Gleichgewicht stabil oder labil ist, je nachdem bei jeder unendlich kleinen Versetzung die Arbeit der auf das System wirkenden Kräfte, die im Falle des Gleichgewichtes ein Unendlich-Kleines der zweiten Ordnung ist, negativ oder positiv ausfällt. In unserem Falle ist demnach das Gleichgewicht der eingeschlossenen Flüssigkeit stabil oder labil, je nachdem die Arbeit der Molecularkräfte, $-\tau\delta T$, negativ oder positiv ist, oder auch, da τ positiv ist, je nachdem δT positiv oder negativ, die Oberfläche der eingeschlossenen Flüssigkeit also eine Fläche *minimae* oder *maximae areae* ist.

Ein System von zwei Flüssigkeiten der hier betrachteten Art hat Plateau zuerst hergestellt, indem er eine Oelmasse in ein Gemisch von Alkohol und Wasser brachte, welches dasselbe specifische Gewicht wie das Oel hatte *(Recherches expérimentales et théoriques sur les figures d'équilibre d'une masse liquide sans pesanteur; Mémoires de l'académie royale de Belgique, tomes XVI, XXIII, XXX, XXXI).*

Wenn die eingeschlossene Flüssigkeit, also Oel, ganz frei ist, so nimmt sie die Gestalt einer Kugel an, die in der That

obiger Differentialgleichung genügt. Wird aber in die eingeschlossene Flüssigkeit ein fester Körper gebracht, der von einer Rotationsfläche begrenzt und mit einer dünnen Oelschicht überzogen ist, so nimmt auch die eingeschlossene Flüssigkeit unter regelmässigen Verhältnissen die Gestalt einer Rotationsfläche an, deren Axe mit der des festen Körpers zusammenfällt. Ein Gleiches gilt auch dann, wenn mehrere feste Körper der angegebenen Art mit der Flüssigkeit in Berührung gebracht werden, sobald nur die Axen der verschiedenen Körper zusammenfallen.

Die Rotationsflächen, welche der oben erwähnten Differentialgleichung genügen, lassen sich ohne Schwierigkeit finden. Wir denken uns zu dem Ende die Axe der z-Coordinaten in der Axe des festen Körpers befindlich. Die Entfernung von dieser Axe bezeichnen wir durch x; alsdann schreibt sich die Differentialgleichung wie folgt (vergl. II. 4):

$$d\left\{\frac{x\frac{dz}{dx}}{\left[1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}}\right\} = cx\,dx.$$

Durch eine erste Integration findet man:

$$dz = \frac{(cx^2+c')\,dx}{\sqrt{4x^2-(cx^2+c')^2}},$$

wo c und c' zwei willkürliche Constanten sind, die aber reell sein müssen, weil die Grössen $\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}$ und $\frac{x\,dz}{(dx^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}}$ es sind. Für die letzte Differentialgleichung kann man setzen:

$$dz = \frac{x^2 \pm \sqrt{u_1 u_2}}{\sqrt{(x^2-u_1)(u_2-x^2)}}\,dx,$$

wo u_1 und u_2 die Wurzeln folgender quadratischen Gleichung sind:

$$c^2u^2+(2cc'-4)\,u+c'^2=0.$$

Da wir aber offenbar nur solche Fälle zu berücksichtigen haben, in denen x und zugleich der Differentialquotient $\frac{dz}{dx}$ reell ist, so kann man, unter α_1 und α_2 zwei positive Grössen ver-

standen, von denen diese letzte die grössere ist, setzen: $u_1 = \alpha_1^2$, $u_2 = \alpha_2^2$, und man hat dann:

$$dz = -\frac{x^2 \mp \alpha_1 \alpha_2}{\sqrt{(x^2 - \alpha_1^2)(\alpha_2^2 - x^2)}}\, dx.$$

Mittelst der Substitution:

$$x^2 = \alpha_1^2 \sin^2\varphi + \alpha_2^2 \cos^2\varphi,$$

welche folgende Gleichungen liefert:

$$x = \alpha_2 \Delta(c, \varphi),$$

$$dx = -\frac{\alpha_2 c^2 \sin\varphi \cos\varphi}{\Delta(c, \varphi)}\, d\varphi,$$

$$\sqrt{(x^2 - \alpha_1^2)(\alpha_2^2 - x^2)} = (\alpha_2^2 - \alpha_1^2) \sin\varphi \cos\varphi,$$

findet man jetzt durch Integration:

$$z = -\alpha_2 \int \Delta(c, \varphi)\, d\varphi \mp \alpha_1 \int \frac{d\varphi}{\Delta(c, \varphi)},$$

wo zu setzen ist:

$$\Delta(c, \varphi) = \sqrt{1 - c^2 \sin^2\varphi}, \qquad c^2 = \frac{\alpha_2^2 - \alpha_1^2}{\alpha_2^2}.$$

Die hier gefundenen Gleichgewichtsflächen theilen sich je nach dem Vorzeichen des zweiten Gliedes in dem Ausdrucke für z in zwei Hauptgruppen, nämlich in solche, bei denen die Vorzeichen von α_1 und α_2 gleich sind, und in solche, bei denen diese Grössen entgegengesetzte Vorzeichen aufweisen. Den Uebergang von der einen dieser Gruppen zur anderen bildet die Fläche, welche zum Vorschein kommt, wenn eine der gedachten Grössen verschwindet. Es ist dies die Kugel, welche noch als besonderen Fall die Ebene in sich begreift, die erhalten wird, wenn die nicht verschwindende Grösse über alle Grenzen wächst. Hiernach gewinnen wir über alle Flächen, mit Ausschluss der erwähnten besonderen Gestalten, einen Ueberblick, wenn wir in dem Ausdrucke für z der Grösse α_1 einen bestimmten von Null verschiedenen Werth beilegen, und die Grösse α_2 von jenem Werthe an bis ins Unendliche wachsen lassen.

Nehmen wir erstlich die beiden Integrale mit gleichen Vorzeichen. Bei gehöriger Wahl des Coordinatenanfangspunktes hat man dann für eine Fläche der Gruppe die beiden folgen-

den Gleichungen, in denen F und E wie gewöhnlich die elliptischen Integrale der ersten und zweiten Art bedeuten:

$$z = \alpha_1 F(c, \varphi) + \alpha_2 E(c, \varphi),$$
$$x^2 = \alpha_1^2 \sin^2\varphi + \alpha_2^2 \cos^2\varphi,$$

und man erhält sämmtliche Punkte der Fläche, indem man den Winkel φ von $-\infty$ bis $+\infty$ variirt.

Aus den beiden letzten Gleichungen folgt, dass die auf der einen Seite der Axe gelegene Hälfte des Meridianes zwischen zwei jener Linie parallelen und in den Abständen α_1 und α_2 gelegenen geraden Linien hin- und herläuft, abwechselnd die eine und die andere der Geraden berührend. Es leuchtet ferner ein, dass eine solche Hälfte aus lauter congruenten Intervallen besteht, deren Länge den Werth:

$$2(\alpha_1 F' + \alpha_2 E')$$

hat, wo F' und E' die vollständigen elliptischen Integrale bezeichnen (deren Amplitude $\frac{1}{2}\pi$ ist). Hiernach wird es genügen, von einer der gedachten Hälften ein solches Intervall näher zu betrachten. Da aber der Meridian auch in Bezug auf die xy-Ebene symmetrisch ist, so genügt es, dasjenige Stück desselben zu betrachten, dessen Grenzen den Werthen $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$ entsprechen. Für $\varphi = 0$ ist auch $z = 0$ und $x = \alpha_2$, welches die grösste Entfernung von der Axe ist. Mit wachsendem φ nähert sich die Curve der Axe und zwar hat man für diese Annäherung, wenn das betrachtete Stück auf der Seite der positiven z liegt:

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x^2 + \alpha_1\alpha_2}{R}, \quad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{(\alpha_1 + \alpha_2)^2 (\alpha_1\alpha_2 - x^2)\, x}{R^3},$$

wo R der absolute Werth der Wurzel $\sqrt{(x^2 - \alpha_1^2)(\alpha_2^2 - x^2)}$ ist. Die Curve kehrt also anfänglich der Axe ihre hohle Seite zu, und die Tangente, welche im Ausgangspunkte jener Linie parallel ist, bildet, während sich die Curve von der xy-Ebene entfernt, immer grössere Winkel mit derselben Linie. Dies geht so fort bis zur Entfernung $\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ von der Axe, wo eine Inflexion eintritt und von wo ab die Curve nach der Axe hin ihre convexe Seite kehrt, während die Neigung der Tangente

gegen die Axe wieder abnimmt. Es kommt endlich die Curve der Axe am nächsten für $\varphi = \frac{\pi}{2}$ oder $x = \alpha_1$, wo die Tangente mit der Axe wiederum parallel läuft. Die hier besprochenen Flächen nennt Plateau mit Rücksicht auf die Gestalt ihrer Meridiancurve Unduloïde.

Da wir gleich nachher von den betreffenden Formeln Gebrauch machen werden, wollen wir auch noch das Volumen und die Oberfläche eines Intervalles eines Unduloïdes suchen. Für das Volumen hat man:

$$V = 2\pi \int x^2\, dz = 2\pi \int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{x^2 (x^2 + \alpha_1 \alpha_2)}{\sqrt{(x^2 - \alpha_1^2)(\alpha_2^2 - x^2)}}\, dx.$$

Mittelst der schon oben benutzten Substitution:

$$x^2 = \alpha_1^2 \sin\varphi^2 + \alpha_2^2 \cos\varphi^2$$

erhält man hieraus folgende Formel:

$$V = 2\pi \alpha_2^3 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} [\Delta^3(c,\varphi) + q\,\Delta(c,\varphi)]\, d\varphi,$$

worin der Modulus c den früheren Werth hat und q den Quotienten $\alpha_1 : \alpha_2$ bedeutet. Nun hat man aber weiter:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta^3(c,\varphi)\, d\varphi = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} - 2c^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi^2}{\Delta(c,\varphi)} d\varphi + c^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi^4}{\Delta(c,\varphi)} d\varphi$$

$$= 2E' - F' + c^4 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi^4}{\Delta(c,\varphi)}\, d\varphi.$$

Das letzte rechts auftretende Integral findet man durch Differentiation des Ausdruckes $\sin\varphi \cos\varphi\, \Delta(c,\varphi)$. Diese gibt:

$$d[\sin\varphi \cos\varphi\, \Delta(c,\varphi)]$$
$$= \cos^2\varphi\, \Delta(c,\varphi)\, d\varphi - \sin^2\varphi\, \Delta(c,\varphi)\, d\varphi - \frac{c^2 \sin\varphi^2 \cos\varphi^2\, d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}$$
$$= \frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} - 2(1+c^2) \frac{\sin\varphi^2\, d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} + 3c^2 \frac{\sin\varphi^4\, d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}.$$

Hieraus folgt:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi^4\, d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} = \frac{2(1+c^2)}{3c^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{\sin\varphi^2\, d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} - \frac{1}{3c^2}\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)}$$

$$= \frac{1}{3c^4}\left[(2+c^2)F' - 2(1+c^2)E'\right].$$

Darnach hat man also:

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \Delta^3(c,\varphi)\, d\varphi = \tfrac{1}{3}\left[(4-2c^2)E' + (c^2-1)F'\right]$$

$$= \tfrac{1}{3}\left[(2+2q^2)E' - q^2F'\right].$$

Somit kann man endlich folgende Formel für das gesuchte Volumen aufstellen:

$$V = \tfrac{2}{3}\pi\alpha_2^3\left[(2+3q+2q^2)E' - q^2F'\right].$$

In ähnlicher Weise finden wir für die Oberfläche eines Unduloïd-Intervalles:

$$O = 4\pi\int x\, ds = 4\pi(\alpha_1+\alpha_2)\int_{\alpha_1}^{\alpha_2} \frac{x^2\, dx}{\sqrt{(x^2-\alpha_1^2)(\alpha_2^2-x^2)}}$$

$$= 4\pi\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2)E'$$

$$= 4\pi\alpha_2^2(1+q)E'.$$

Als Grenzformen für die Flächen, welche sich einem gegebenen Werthe von α_1 zuordnen, erhält man einerseits, nämlich für $\alpha_2 = \alpha_1$, den Cylinder, dargestellt durch die Gleichung:

$$x = \alpha_1.$$

Und andererseits, nämlich für $\alpha_2 = \infty$, erhält man die Fläche, deren Gleichung die folgende ist:

$$x = \tfrac{1}{2}\alpha_1\left(e^{\frac{z}{\alpha_1}} + e^{-\frac{z}{\alpha_1}}\right).$$

Diese Gleichung findet sich leicht aus der obigen Differentialgleichung zwischen x und z, die jetzt durch einen Logarithmus integrirt werden kann. Der Meridian der in Rede stehenden Fläche ist, wie man sieht, eine Kettenlinie, deren Symmetrieaxe auf der Revolutionsaxe senkrecht steht, und welche sich der letzten Axe bis auf die Entfernung α_1 nähert. Plateau nennt die Fläche selbst ein Katenoïd.

Für die zweite Hauptgruppe von Flächen hat man bei gehöriger Wahl des Coordinatenanfangspunktes:

$$z = \alpha_1 F(c, \varphi) - \alpha_2 E(c, \varphi),$$
$$x^2 = \alpha_1^2 \sin^2\varphi + \alpha_2^2 \cos^2\varphi.$$

Auch diese Flächen bestehen aus Intervallen, die einander congruent sind und von denen ein jedes wiederum aus zwei congruenten Hälften besteht. Sämmtliche Punkte einer solchen Hälfte erhalten wir, wenn wir in den obigen Gleichungen der Amplitude φ nach und nach alle Werthe von 0 bis $\frac{\pi}{2}$ beilegen. In einer Meridiancurve entspricht dem ersten Werthe $z = 0$ und $x = \alpha_2$, welches die grösste Entfernung von der Axe ist. Schreiten wir von dem durch jene Coordinaten bestimmten Punkte, in welchem die Tangente der Axe parallel ist, auf dem Theile der Curve fort, der auf der Seite der positiven z liegt, so nähern wir uns fortwährend der Revolutionsaxe, und die Art der Näherung wird durch die folgenden Differentialquotienten bestimmt:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\alpha_1\alpha_2 - x^2}{R}, \qquad \frac{d^2z}{dx^2} = \frac{(\alpha_1 - \alpha_2)^2 (\alpha_1\alpha_2 + x^2)\, x}{R^3}.$$

Aus letzterem Ausdrucke ersehen wir, dass der Winkel zwischen der Tangente und der Axe stetig wächst. In der Entfernung $\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ beträgt er 90^0 und für $\varphi = \frac{\pi}{2}$, $x = \alpha_1$, $z = \alpha_1 F' - \alpha_2 E'$ wird er 180^0. Der Theil der Curve, dessen Endpunkte um α_2 und $\sqrt{\alpha_1\alpha_2}$ von der Axe entfernt sind, ist nach der Axe hin concav. Der Theil, welcher sich an jenen in der letztgenannten Entfernung anschliesst und an seinem anderen Ende einen um die Axe mit dem Radius α_1 beschriebenen Cylinder berührt, ist nach jener Linie hin convex. Wegen der Gestalt des Meridianes einer vollständigen Fläche der erörterten Art, welcher mit einer verschlungenen Cycloïde Aehnlichkeit hat und somit in gleichen Intervallen Schleifen mit Doppelpunkten aufweist, hat Plateau diese Flächen Nodoïde genannt. Das oben betrachtete Intervall nähert sich, wenn man α_2 der Grösse α_1 nähert, schliesslich einem verschwindenden Kreise, und wenn man α_2 über alle Grenzen wachsen lässt, so nähert sich der im Endlichen bleibende Theil eines Intervalles der Meridiancurve einer Kettenlinie.

Aus den zahlreichen Versuchen, welche Plateau (l. c.) über die Gleichgewichtsflächen einer der Schwerkraft entzogenen Flüssigkeit angestellt hat, heben wir die folgenden als Bestätigungen der vorhergehenden Betrachtungen hervor.

Der gedachte Forscher stellte die cylindrische Oberfläche her, indem er zunächst im Inneren einer Mischung aus Alkohol und Wasser eine Masse Olivenöl von demselben specifischen Gewichte mit zwei gleichgrossen Metallringen von kreisförmigem Querschnitte und mit gemeinschaftlicher Axe zur Adhärenz brachte. Die Oberfläche bietet alsdann, von den Stellen abgesehen, an denen die Ringe anliegen, drei verschiedene Theile dar. Auf den beiden Ringen nämlich sitzen zwei congruente, nach aussen convexe Kugelabschnitte auf, und von dem einen Ringe zum anderen wird die Flüssigkeit durch eine nach aussen convexe Revolutionsfläche begrenzt, deren Axe durch die Mittelpunkte der Ringe geht und welche in Bezug auf eine in der Mitte zwischen den Ringen auf der Axe senkrecht stehende Ebene symmetrisch ist. Es wurde hierauf der eine Ring längs der Axe verschoben. In Folge dessen nimmt die Convexität der Oberfläche ab, bis schliesslich der mittlere Theil derselben vollkommen cylindrisch erscheint. Es muss aber bemerkt werden, dass sich nur dann ein solcher Cylinder herstellen lässt, wenn die Entfernung der Ringe ihren Umfang nicht übertrifft, indem bei grösserer Länge des Cylinders nach Plateau's Beobachtungen das Gleichgewicht ein labiles ist. Durch Anwendung zweier Ringe, deren äusserer Radius 3,57^{cm} betrug und deren Querschnitt den Radius 0,037^{cm} hatte, stellte Plateau einen Cylinder her, bei dem die Entfernung der nach aussen gekehrten Grundflächen der Ringe 5,779^{cm} betrug, wie sich im Mittel aus mehreren mit dem Kathetometer angestellten Messungen ergab. Mit Hülfe desselben Instrumentes wurde die Entfernung der Scheitel der beiden sphärischen Menisken zuerst zu 7,679^{cm} und hierauf, nachdem das Gemisch aus Alkohol und Wasser umgerührt worden, zu 7,702^{cm} bestimmt. Um die Bestätigung, welche die Theorie durch die mitgetheilten Messungen findet, zu erkennen, bemerke man, dass die Summe der Hauptkrümmungen an den Theilen der Oberfläche,

welche nicht feste Körper bedecken, constant bleiben muss, und somit der Radius der beiden Menisken, welche die Ringe ausserhalb berühren, gleichkommen muss dem Doppelten des Radius des Cylinders oder des äusseren Radius der Ringe, welche von dem Cylinder längs ihres äusseren Aequators berührt werden. Nun findet man aber leicht unter Zugrundelegung der angegebenen Dimensionen eines Ringes für die Höhe eines sphärischen Meniscus, der den letztgenannten Bedingungen genügt, über den Aequator des Ringes den Werth 0,941^{cm}. Für dieselbe Grösse ergeben sich aber aus den Daten der zwei Beobachtungen die Werthe 0,950^{cm} und 0,961^{cm}.

Ein vollständiges Intervall einer Fläche der ersten Gruppe, begrenzt von zwei auf einander folgenden Einschnürungskreisen, wurde von Plateau hergestellt, indem er um einen mit einer Oelschicht überzogenen Eisenstab eine Masse Oel goss. Sie legte sich um denselben in Gestalt eines Ringes an, der nach aussen von dem gedachten Intervalle begrenzt wird, und es berührt die Oberfläche der Flüssigkeit die des Cylinders längs der beiden Einschnürungskreise.

Ein Theil einer Fläche derselben Art, in dessen Mitte sich aber nicht eine Ausbuchtung, sondern eine Einschnürung befindet, wurde von Plateau wie folgt hergestellt. Er erzeugte zuerst zwischen zwei Ringen von 7^{cm} Durchmesser, die um 11^{cm} von einander abstanden, einen Oelcylinder. Hierauf wurde das Oel theilweise durch Aufsaugen mittelst einer Pipette entfernt. Der Cylinder schnürt sich in der Mitte ein und das Oel ist hier in der Ebene des Meridians nach aussen hin hohl, während es in der Nähe der Ringe convex ist. Die Einschnürung konnte so weit getrieben werden, dass der Durchmesser in der Mitte nur mehr 2,7^{cm} betrug. Solche Stücke der Flächen erster Art, deren Symmetrie-Ebene in eine Einschnürung oder Ausbuchtung fällt, sind, wenn sie zwischen dünnen Scheiben oder Ringen hergestellt werden, der Beobachtung zufolge nur so lange stabil, als die Entfernung der letzteren ein Intervall der Fläche nicht übertrifft; von dieser Regel ist das Gesetz über die Stabilität des Cylinders ein besonderer Fall, indem für die Grenze 1 des Verhältnisses $\alpha_1 : \alpha_2$

die Länge jenes Intervalles dem Umfange eines Kreises vom Radius α_1 gleichkommt, da dann $c = 0$, $F' = E' = \frac{1}{2}\pi$ werden.

Um einen Theil eines Nodoïdes zu erhalten, dessen Symmetrie-Ebene mit der Mittelebene eines der oben betrachteten Intervalle zusammenfällt, hat man nach Plateau wie folgt zu verfahren. Zwischen zwei gleichen, auf derselben Axe senkrecht stehenden Scheiben stellt man zuerst einen Cylinder her. Hierauf nähert man die Scheiben einander. An die Stelle der Cylinderfläche treten zunächst Theile von Unduloïden, die nach aussen hin convex-convex sind. Für eine gewisse Entfernung der Scheiben ist die ihre Ränder berührende Oberfläche eine Kugelzone. Die ebenfalls convex-convexen Flächen, welche auftreten, wenn die Entfernung noch weiter vermindert wird, sind Theile des Nodoïdes. Die Flächen sind nur so lange stabil, als die Tangentialebene der Fläche da, wo sie die Ränder der Scheiben berührt, einen Winkel mit der Rotationsaxe bildet, der kleiner als 90^0 ist.

Man bringe ferner zwei Scheiben auf die angegebene Weise in eine Entfernung, die ungefähr dem dritten Theile ihres Durchmessers gleichkommt. Alsdann kann man durch Entfernung eines Theiles der Flüssigkeit es bewirken, dass die Oberfläche derselben beide Scheiben nicht mehr an den Rändern, sondern längs Kreisen berührt, die den Rändern concentrisch sind und auf je einer der nach innen gekehrten Flächen der Scheiben liegen. Die concav-convexe Oberfläche ist alsdann ein Theil des Nodoïdes und die Symmetrie-Ebene derselben geht durch eine der Doppellinien des Nodoïdes, von dem sie einen Theil ausmacht.

Endlich möge noch erwähnt werden, wie Plateau das Katenoïd herzustellen gelehrt hat. Zwischen zwei Ringen, deren äusserer Durchmesser $7{,}1^{cm}$ und deren Entfernung $4{,}5^{cm}$ betrug, wurde zuvörderst ein Cylinder hergestellt und hierauf die Masse der Flüssigkeit durch Aufsaugen vermindert. Die auf den Ringen aufsitzenden Kugelabschnitte verlieren in dem Maasse, als sich der Cylinder einschnürt, ihre Convexität, werden flach und schliesslich werden die Basen nach aussen hin hohl. In dem Falle, wo die Basen beim Uebergange aus

der Convexität in die Concavität eben sind, muss die concav-convexe Fläche, welche die flüssige Masse seitlich begrenzt, ein Katenoïd sein, da letzteres die einzige concav-convexe Revolutionsfläche ist, bei der die Summe der Hauptkrümmungen verschwindet.

Von besonderem Interesse sind die in Folge einer Erschütterung eintretenden Bewegungen und Gestaltveränderungen, welche Plateau an einem künstlich hergestellten flüssigen Cylinder beobachtet hat, dessen Länge vielmal grösser ist als sein Umfang, dessen Gleichgewicht also nach dem Obigen nur labil ist. Der Hergang ist folgender. Bei einer möglichst schwachen und regelmässigen Erschütterung beginnt der Cylinder an gewissen Punkten sich einzuschnüren, deren Entfernung von einander seinem Umfange gleichkommt; an den Stellen, welche in der Mitte zwischen je zwei Einschnürungen liegen, entstehen zu gleicher Zeit Ausbuchtungen. Indem der horizontale Durchmesser dieser Bäuche wächst, bildet sich an jeder Einschnürungsstelle als Verbindungsglied je zweier auf einander folgenden Bäuche ein Cylinder, dessen Länge fortwährend zunimmt und dessen Durchmesser stetig kleiner wird. Dabei nähert sich die Gestalt der Bäuche, je mehr dieselben sich in verticaler Richtung zusammenziehen, mehr und mehr der Kugelform. Wenn die Gestaltveränderung so weit fortgeschritten ist, dass die Länge der die Bäuche verbindenden Cylinder gleich ihrem Umfange geworden ist, mithin die Stabilität derselben aufhört, so kann zweierlei eintreten. Entweder zerreissen die Cylinder und es bilden sich aus den Bäuchen gleich grosse, kugelförmige Tropfen, deren Abstand gleich ist dem Umfange des ursprünglichen Cylinders; oder aber, wenn der Hergang möglichst regelmässig verläuft und die Verbindungscylinder den Erschütterungen widerstehen, bauchen sich diese in ihrer Mitte von Neuem aus, und die Flüssigkeit zeigt also jetzt die grösseren primären und mit diesen abwechselnd die kleineren secundären Bäuche, welche sämmtlich durch Cylinder von gleichem Durchmesser verbunden sind. Beim weiteren Verlaufe nimmt der Horizontal-Durchmesser aller Bäuche, sowie die Länge der Verbindungscylinder wieder

zu, der Durchmesser der letzteren dagegen ab, und wenn dann ihre Länge von Neuem ihrem Umfange gleich geworden ist, ihre Stabilität also aufhört, so zerreissen dieselben meist und es entstehen aus den Bäuchen daher abwechselnd grössere und kleinere kugelförmige Tropfen, wobei die kleineren jedesmal in der Mitte zwischen zwei grösseren liegen und der Abstand der letzteren von einander gleich dem Umfange des ursprünglichen Cylinders ist. Es kann aber auch bei sehr regelmässigem Hergange geschehen, dass die Verbindungscylinder in dem zuletzt beschriebenen Stadium den Erschütterungen Widerstand leisten und noch einmal in der Mitte sich ausbuchten, wobei dann also grössere, mittlere und kleinere Bäuche sich zeigen, die beim endlichen Zerreissen der Verbindungsfäden grössere, mittlere und kleinere, in regelmässiger Folge abwechselnde, kugelförmige Tropfen erzeugen.

Um nun den theoretischen Zusammenhang der hier beschriebenen Vorgänge zu erkennen, erinnern wir zuerst daran, dass, falls eine der Schwere entzogene Flüssigkeit sich in labilem Gleichgewichte befindet, die von den Molecularkräften bei einer unendlich kleinen Gestaltveränderung geleistete Arbeit $-o\delta T$ im ersten Augenblicke positiv ist und auch im weiteren Verlaufe positiv bleibt, so lange nicht die Flüssigkeit durch eine stabile Gleichgewichtslage hindurchgeht. Falls also dieselbe sich ursprünglich nicht in der Lage des stabilen Gleichgewichtes befand, so muss bei allen durch die Molecularkräfte bewirkten Gestaltveränderungen δT negativ sein, d. h. die Flüssigkeit strebt, indem sie ihre Oberfläche fortwahrend verkleinert, mehr und mehr der Fläche *minimae areae* zu. Wird nun der bei den in Rede stehenden Versuchen vorausgesetzte ursprüngliche Cylinder, dessen Halbmesser α sei, unendlich wenig und möglichst regelmässig erschüttert, so wird derselbe die Gestalt eines Undulo'ides annehmen, für welches die Halbmesser der Einschnürungen und Ausbuchtungen resp. $\alpha-\mu$ und $\alpha+\nu$ sind, unter μ und ν zwei unendlich kleine Grössen verstanden. Die Länge eines Intervalles dieser Fläche ist aber nach dem Obigen $2\alpha\pi$, gleich dem Umfange des ursprünglichen Cylinders, woraus sich also

die erste Bildung der Einschnürungen und Ausbuchtungen erklärt. Es ist nun ganz natürlich, dass bei regelmässigem Verlaufe die Mittelebenen der Einschnürungen ihre Lage unverändert behalten und die Oberflächen der einzelnen Theile, worin die Flüssigkeit zerfällt, solche Gestalten zeigen, die stetig in einander verlaufen und, wenn ihre Grenzen befestigt würden, für die von ihnen umschlossene Flüssigkeit stabile Gleichgewichtsfiguren darstellen würden. Der Theil der Flüssigkeit, welcher zwischen zwei Einschnürungsebenen enthalten ist, besteht im weiteren Verlaufe aus einer mittleren Ausbuchtung, die nach dem eben Gesagten nur von einem Intervall eines Unduloïdes begrenzt sein kann, an welche sich zwei Cylinder ansetzen. Bezeichnen wir wie früher den Einschnürungs- und Ausbuchtungshalbmesser des Undulo'ides mit α_1 und α_2, sowie das Verhältniss derselben $\alpha_1 : \alpha_2$ mit q, so ist die Länge des Bauches nach dem Früheren:

$$2(\alpha_1 F' + \alpha_2 E') = 2\alpha_2 (E' + q F'),$$

und also die Länge der beiden Ansatzcylinder zusammengenommen:

$$2[\alpha\pi - \alpha_2 (E' + q F')],$$

wobei die auftretenden vollständigen elliptischen Integrale sich wieder auf den zu q complementären Modulus c beziehen. Da nun nach dem Obigen der Radius der Verbindungscylinder gleich α_1 sein muss, so findet man nach den früher (S. 165) abgeleiteten Formeln für das Volumen W und die Oberfläche T der ganzen zwischen zwei Einschnürungsebenen enthaltenen Flüssigkeit:

$$W = 2\alpha_2^3 q^2 \pi [\alpha\pi - \alpha_2 (E' + q F')] + \tfrac{2}{3}\alpha_2^3 \pi [(2 + 3q + 2q^2) E' - q^2 F']$$
$$- \tfrac{2}{3}\alpha_2^3 \pi [3\alpha q^2 \pi + \alpha_2 [(2 + 3q - q^2) E' - (q^2 + 3q^3) F']],$$
$$T = 4\alpha_2 \pi [\alpha q \pi + \alpha_2 (E' - q^2 F')].$$

Da nun nach dem Obigen das Volumen W constant bleiben muss, so haben wir als Bedingungsgleichung für alle in Frage kommenden, den Variationen $\delta\alpha_2$ und δq entsprechenden Gestaltveränderungen:

$$\delta W = 0,$$

welche, unter Berücksichtigung der bekannten Formeln:

$$\frac{dF'}{dq} = \frac{q^2F' - E'}{c^2q},$$
$$\frac{dE'}{dq} = \frac{q(F' - E')}{c^2}$$

gehörig entwickelt, liefert:

$$\delta q = -\frac{2\alpha q^2\pi + \alpha_2[(2+3q-q^2)E' - (q^2+3q^3)F']}{\alpha_2\{2\alpha q\pi + \alpha_2[(1-q)E' - 2q^2F']\}}\,\delta\alpha_2.$$

Aus der Formel für T findet man:

$$\delta T = 4\pi\{[\alpha q\pi + 2\alpha_2(E' - q^2F')]\,\delta\alpha_2 + \alpha_2(\alpha\pi - \alpha_2 qF')\,\delta q\};$$

setzt man nun in diese Gleichung für δq seinen vorhin angegebenen Werth ein, so findet man nach einigen Umformungen:

$$\delta T = \frac{4\pi\alpha_2(1-q)(q^2F' - 2E')[\alpha\pi - \alpha_2(E' + qF')]}{\alpha_2(1+q)E' + 2q[\alpha\pi - \alpha_2(E' + qF')]}\,\delta\alpha_2.$$

Der Coefficient von $\delta\alpha_2$ in dieser Formel ist negativ, denn der Factor

$$q^2F' - 2E'$$

des Zählers ist negativ und der Ausdruck:

$$\alpha\pi - \alpha_2(E' + qF')$$

ist seiner Bedeutung nach stets positiv. Es folgt das Erstere aus der oben angeführten Formel für $\frac{dF'}{dq}$; da nämlich dieser Differentialquotient negativ ist, muss

$$q^2F' - E',$$

also um so mehr der in Rede stehende Ausdruck negativ sein. Einem positiven $\delta\alpha_2$ entspricht somit ein negatives δT, woraus folgt, dass bei den Gestaltveränderungen des flüssigen Cylinders, wie sie oben beschrieben wurden, bei denen α_2 stetig wächst, die Oberfläche in der That sich fortwährend verkleinert, wie es nach unserer Theorie erforderlich ist. Es folgt hieraus auch, was oben schon vorausgesetzt wurde, dass der Cylinder, dessen Länge seinen Umfang übertrifft, eine Fläche *maximae areae* ist, sowie dass keine der folgenden Gestalten der Flüssigkeit eine Gleichgewichtsfläche ist, obschon sie alle aus Theilen bestehen, welche für sich allein betrachtet Gleichgewichtsflächen sind. Das Letztere geht indess auch ohne

Weiteres daraus hervor, dass in jedem der Verbindungscylinder die Summe der Hauptkrümmungen kleiner ist, wie in den Ausbuchtungen. Auch erhellt jetzt, warum die Verbindungscylinder, wenn sie eine bestimmte Länge erreicht haben und nicht zerreissen, sich von Neuem ausbuchten müssen.

Dass, während der Ausbuchtungshalbmesser α_2 wächst, die Länge der Bäuche abnehmen, also die Länge der Verbindungscylinder zunehmen muss, folgt ebenso aus unseren Formeln. Denn bezeichnen wir die Länge der Bäuche mit L, so ist:

$$L = 2\alpha_2 (E' + q F''),$$

woraus folgt:

$$\frac{1}{2} q \delta L = (1 - q)(E' + q F'') \delta \alpha_2 + \alpha_2 (F'' - E') \delta q.$$

Setzen wir auch hier für δq seinen oben angegebenen Werth, so kommt nach einigen Umformungen:

$$\frac{\frac{1}{2} q \delta L}{(E' - q^2 F'')[2\alpha q \pi - \alpha_2 (1 + q + 2q^2) F''] - \alpha_2 E' [(1 + q + 2q^2) F'' - (3 + q) E']} \delta \alpha_2.$$
$$2\alpha q \pi + \alpha_2 [(1 - q) F'' - 2q^2 F'']$$

Der Factor:

$$2\alpha q \pi - \alpha_2 (1 + q + 2q^2) F''$$

im Zähler dieses Ausdruckes ist stets negativ, da für jedes q, wie man sich mittelst der elliptischen Tafeln überzeugt, der Coefficient von α kleiner ist, wie derjenige von α_2, und zudem der Natur der Sache nach α_2 stets grösser ist, als α. Ebenso überzeugt man sich mittelst der elliptischen Tafeln, dass der Ausdruck:

$$(1 + q + 2q^2) F'' - (3 + q) E'$$

von 0 bis ∞ stetig wächst, wenn q von 1 bis 0 abnimmt. Daraus folgt, dass der Coefficient von $\delta \alpha_2$ in vorstehender Formel stets negativ ist, woraus sich also die Verkürzung der Bäuche und somit sowohl die anfängliche Bildung als nachherige Verlängerung der Verbindungscylinder als nothwendig ergibt.

Nachdem wir so die in Rede stehenden Vorgänge im Allgemeinen als mit unserer Theorie in Uebereinstimmung nach-

gewiesen haben, ist es auch leicht, dieselben im Einzelnen mit der Rechnung zu verfolgen. Bedenkt man, dass das oben mit W bezeichnete Volumen constant und zwar gleich $2\alpha^3\pi^2$ sein muss, so hat man folgende für α_2 cubische und für q transscendente Gleichung:

$$\tfrac{1}{3}\alpha_2^2\{3\alpha q^2\pi + \alpha_2[(2+3q-q^2)E' - (q^2+3q^3)F']\} = \alpha^3\pi,$$

aus welcher für ein gegebenes α_2 oder q resp. das zugehörige q oder α_2 berechnet werden muss. Fasst man den Moment ins Auge, wo die Länge der Verbindungscylinder gleich ihrem Umfange geworden ist, so muss man zu vorstehender Gleichung noch folgende hinzufügen:

$$\alpha\pi - \alpha_2(E' + qF') = \alpha_2 q\pi.$$

Eliminirt man aus beiden Gleichungen α_2, so erhält man für q leicht folgende transscendente Gleichung:

$$3(E'+qF'+q\pi)^3 - \pi^2[3\pi q^3 + (2+3q+2q^2)E' - q^2F'] = 0.$$

Die Auflösung derselben liefert $q = 0{,}1563$. Mittelst dieses Werthes erhalten wir dann weiter:

$$\alpha_2 = 1{,}545, \qquad \alpha_1 = 0{,}2414.$$

Für die Länge und das Volumen einer Ausbuchtung in diesem Grenzfalle findet sich resp. 4,766 und 19,48, für die Länge und das Volumen eines der Verbindungscylinder dagegen 1,517 und 0,278. Wenn die Verbindungscylinder zerreissen, sich also nur Tropfen von einerlei Art bilden, so wird das Volumen eines Tropfens 19,76 und sein Halbmesser demnach 1,677; der Abstand zweier Tropfen ist 6,283. In dem Falle dagegen, dass die Verbindungscylinder sich von Neuem ausbuchten, sich also Tropfen von zweierlei Art bilden, wird das Volumen eines grossen Tropfens wenigstens nahe gleich dem oben gefundenen Volumen 19,48 einer primären Ausbuchtung sein, während das Volumen eines kleinen Tropfens nahe dem Volumen 0,278 eines Verbindungscylinders gleichkommen wird, woraus sich die Halbmesser der grossen und kleinen Tropfen resp. gleich 1,669 und 0,410 ergeben; ihr Abstand ist 3,142. Dasselbe Verhältniss endlich wie zwischen α_1 und α_2 wird annähernd auch zwischen den Halbmessern der secundären Aus-

buchtungen und der die grossen und kleinen Ausbuchtungen verbindenden Flüssigkeitsfäden bestehen.

3. Gleichgewichtsflächen einer gleichförmig rotirenden, der Schwerkraft entzogenen Flüssigkeit.

Wir wollen jetzt ein aus einer umschlossenen und einer umschliessenden Flüssigkeit bestehendes System betrachten und annehmen, dass jede der specifisch gleichschweren Flüssigkeiten um eine und dieselbe, in die Richtung des Lothes fallende Axe mit einer constanten Winkelgeschwindigkeit rotire, was die weitere Annahme involvirt, dass die Oberfläche der umschlossenen Flüssigkeit, sowie das Gefäss, welches die einschliessende Flüssigkeit enthält, die Gestalt einer Rotationsfläche habe, deren Axe mit der Rotationsaxe zusammenfällt. Von der Reibung zwischen den Theilchen des festen Gefässes und den Theilchen der äusseren Flüssigkeit, sowie von der Reibung an der Grenzfläche beider Flüssigkeiten soll ganz abgesehen werden. Die theoretischen Ergebnisse, zu denen wir gelangen werden, müssen uns auf die Gestaltveränderungen führen, welche Plateau in seinen bekannten Versuchen an einem in einer Mischung von Alkohol und Wasser rotirenden Oeltropfen zuerst beobachtet hat.

Dem d'Alembert'schen Principe zufolge halten sich die verlorenen Kräfte an dem Systeme der Flüssigkeit, solches ruhend gedacht, das Gleichgewicht. Es bestehen aber die verlorenen Kräfte aus den Molecularkräften, aus den Schwerkräften und aus den Centrifugalkräften. Da uns nur die Bestimmung der Oberfläche der eingeschlossenen Flüssigkeit beschäftigen soll, so werden wir nur solche Variationen zu betrachten haben, wobei die äussere Oberfläche der äusseren Flüssigkeit ungeändert bleibt. Die Glieder der allgemeinen Variationsformel für ein aus zwei Flüssigkeiten von gleichem specifischen Gewichte bestehendes System, die sich auf die Schwerkraft und auf die äussere Oberfläche der umschliessenden Flüssigkeit beziehen, verschwinden aber für die gedachten Variationen, und als äussere Kräfte sind mithin nur die Centrifugal-

gewiesen haben, ist es auch leic... in die Rotationsaxe der Rechnung zu verfolgen. ... von derselben durch x, W bezeichnete Volume... ...entrifugalkräfte bei einer Va- muss, so hat man ... scendente Gleichu...

$$\frac{1}{3}\alpha_2^2 \{ 3\alpha q^2 \pi \ldots \ldots \varrho\, dk + \int P_i' \,\delta p_i' \,.\, \varrho\, dk'$$

$$\ldots \varrho\, \delta x\, dk + \int x' \,\theta'^2 \varrho\, \delta x'\, dk',$$

aus welcher ... und θ die Winkelgeschwindigkeiten, ϱ die gemein- q oder α_2 ... Dichtigkeit der eingeschlossenen und der umschliessen- Auge, ... der Flüssigkeit bezeichnen. Für obigen Ausdruck kann man Umfar... ferner setzen:

$$\frac{\varrho}{2}\,\delta \{ \theta^2 \int x^2\, dk + \theta'^2 \int x'^2\, dk \},$$

chur ...

oder, wenn dT das Oberflächenelement für die eingeschlossene Flüssigkeit, δn die Variation der von innen nach aussen gerechneten Normale derselben Fläche ist:

$$\tfrac{1}{2}\varrho\,(\theta^2 - \theta'^2) \int x^2\, \delta n\, dT.$$

Man hat aber weiterhin, wenn R_1 und R_2 die Hauptkrümmungsradien der Fläche T sind, solche in der früher angegebenen Weise gerechnet:

$$\delta T = \int \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \delta n\, dT.$$

Mit Rücksicht auf die beiden letzten Resultate und die allgemeine Variationsformel ergibt sich nun für die Trennungsfläche der rotirenden Flüssigkeit die folgende Differentialgleichung zweiter Ordnung:

$$\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{\varrho\,(\theta^2 - \theta'^2)}{2\tau}\, x^2 + C,$$

wo C eine willkürliche Constante ist. Da die Trennungsfläche der Unterstellung gemäss eine Rotationsfläche ist, so lässt sich die Integration der obigen Gleichung ausführen; man findet zunächst, wenn noch

$$\frac{\varrho\,(\theta^2 - \theta'^2)}{8\tau} = a$$

gesetzt wird und durch b und c zwei willkürliche Constanten bezeichnet werden (vergl. II. 4):

$$\frac{x\,dz}{(dx^2+dz^2)^{\frac{1}{2}}} = ax^4+bx^2+c.$$

eite Integration liefert alsdann:

$$z=\int^{x}\frac{ax^4+bx^2+c}{\sqrt{x^2-(ax^4+bx^2+c)^2}}\,dx.$$

Dieses Integral ist ein hyperelliptisches und die vollständige Discussion aller in der vorstehenden Gleichung enthaltenen Arten von Flächen mit grossen Schwierigkeiten verbunden.

In den folgenden Betrachtungen soll darum nur auf diejenigen Flächen Rücksicht genommen werden, welche in der Rotationsaxe Scheitel aufweisen, und deren Meridian eine in sich geschlossene Curve ist. Solche aber können offenbar nur auftreten, wenn $c=0$ ist. Der Zähler des Integranden zieht sich alsdann auf eine Function dritten Grades von x, der Radicand im Integrale auf eine Function dritten Grades in Bezug auf x^2 zurück und das Integral wird ein elliptisches. Der Radicandus hat, wegen der gemachten Unterstellung, mindestens ein und höchstens drei Paare reeller, entgegengesetzt gleicher Wurzeln. In dem ersten Falle möge der absolute Werth der reellen Wurzeln, im zweiten Falle der grösste der absoluten Werthe durch x_1 bezeichnet werden. Es ist dann, wenn noch der Coordinatenanfangspunkt in einen der gedachten Scheitel gelegt und $b:a=p$ gesetzt wird:

$$z=\int_0^{x}\frac{x^3+px}{\sqrt{(x_1^2-x^2)\,(x^4+\alpha x^2+\beta)}}\,dx,$$

wo zu setzen ist:

$$\alpha=2p+x_1^2,\quad \beta=\frac{1}{a^2x_1^2},$$

und wo ferner wegen der Bedeutung von x_1

$$ax_1^3+bx_1=1$$

ist.

Durch die Substitution:

$$x_1^2-x^2=x_1^2u^2$$

findet man, wenn man zur Abkürzung

$$\frac{1}{a x_1^3} = k$$

setzt und die aufgeführten Relationen beachtet:

$$z = x_1 \int_u^1 \frac{k - u^2}{\sqrt{u^4 - (1+2k)\,u^2 + (2k+k^2)}}\, du.$$

Zur weiteren Umformung setzen wir:

$$u = m\, tang\, \tfrac{1}{2}\varphi, \qquad m = \sqrt[4]{2k+k^2};$$

dadurch erhalten wir:

$$z = \tfrac{1}{2} x_1 \int_\varphi^{\varphi_0} \frac{k - m^2\, tang^2\, \tfrac{1}{2}\varphi}{\sqrt{m^2\, tang^4\, \tfrac{1}{2}\varphi - (1+2k)\, tang^2\, \tfrac{1}{2}\varphi + m^2}} \cdot \frac{d\varphi}{cos^2\, \tfrac{1}{2}\varphi}$$

$$= \tfrac{1}{2} x_1 \int_\varphi^{\varphi_0} \frac{k - m^2\, tang^2\, \tfrac{1}{2}\varphi}{\sqrt{m^2\, sin^4\, \tfrac{1}{2}\varphi - \frac{1+2k}{4}\, sin^2\varphi + m^2\, cos^4\, \tfrac{1}{2}\varphi}}\, d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2} x_1 \int_\varphi^{\varphi_0} \frac{k - m^2\, tang^2\, \tfrac{1}{2}\varphi}{\sqrt{m^2\left(\frac{1-cos\,\varphi}{2}\right)^2 - \frac{1+2k}{4}\, sin^2\varphi + m^2\left(\frac{1+cos\,\varphi}{2}\right)^2}}\, d\varphi$$

$$= \tfrac{1}{2} x_1 \int_\varphi^{\varphi_0} \frac{k - m^2\, tang^2\, \tfrac{1}{2}\varphi}{\sqrt{m^2 - \left(\frac{m^2}{2} + \frac{1+2k}{4}\right) sin^2\varphi}}\, d\varphi$$

$$= \frac{k x_1}{2m} \int_\varphi^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\, sin^2\varphi}} - \frac{m x_1}{2} \int_\varphi^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\, sin^2\varphi}}$$

$$- \frac{m x_1}{2} \int_\varphi^{\varphi_0} \frac{(tang^2\, \tfrac{1}{2}\varphi - 1)\, d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\, sin^2\varphi}}$$

$$= \left(\frac{k x_1}{2m} - \frac{m x_1}{2}\right) \int_\varphi^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - c^2\, sin^2\varphi}} + m x_1 \int_\varphi^{\varphi_0} \frac{cos\,\varphi\, d\varphi}{(1+cos\,\varphi)\sqrt{1 - c^2 sin^2\varphi}},$$

wo gesetzt wurde:

$$c^2 = \tfrac{1}{2} + \frac{1+2k}{2m^2}, \quad m\, tang\, \tfrac{1}{2}\varphi_0 = 1.$$

Das erste Integral kann man sofort durch zwei elliptische Integrale der ersten Art ausdrücken; das letzte findet man z. B. durch Differentiation des Ausdruckes $tang\, \frac{1}{2}\varphi \sqrt{1 - c^2 sin^2\varphi}$. Man hat nämlich:

$$d(tang\, \tfrac{1}{2}\varphi \sqrt{1-c^2 sin^2\varphi}) = \frac{\sqrt{1-c^2 sin^2\varphi}}{1+cos\varphi} d\varphi - \frac{c^2 sin\varphi\, cos\varphi\, tang\, \frac{1}{2}\varphi}{\sqrt{1-c^2 sin^2\varphi}} d\varphi$$
$$= \frac{1 - c^2 sin^2\varphi - c^2 sin^2\varphi\, cos\varphi}{(1+cos\varphi)\sqrt{1-c^2 sin^2\varphi}} d\varphi.$$

Addirt und subtrahirt man im Zähler des letzten Bruches $cos\varphi$, so findet man sogleich:

$$d(tang\, \tfrac{1}{2}\varphi \sqrt{1-c^2 sin^2\varphi})$$
$$= -\frac{cos\varphi\, d\varphi}{(1+cos\varphi)\sqrt{1-c^2 sin^2\varphi}} + \sqrt{1-c^2 sin^2\varphi}\, .\, d\varphi;$$

hieraus folgt endlich:

$$\int_{\varphi}^{\varphi_0} \frac{cos\varphi\, d\varphi}{(1+cos\varphi)\sqrt{1-c^2 sin^2\varphi}}$$
$$= \int_{\varphi}^{\varphi_0} \sqrt{1-c^2 sin^2\varphi}\, d\varphi - \left\{ tang\, \tfrac{1}{2}\varphi \sqrt{1-c^2 sin^2\varphi} \right\}_{\varphi}^{\varphi_0}.$$

Nach allem Vorhergehenden ergibt sich jetzt folgender Ausdruck für die z-Coordinate:

$$z = m x_1 \left\{ E(c,\varphi) - \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{k}{m^2}\right) F(c,\varphi) - tang\, \tfrac{1}{2}\varphi\, \Delta(c,\varphi) \right\}_{\varphi}^{\varphi_0},$$

in welcher Formel die bei den elliptischen Integralen üblichen Bezeichnungen angewandt worden sind und für den Modulus c und die Amplituden φ und φ_0 nach dem Obigen zu setzen ist:

$$c^2 = \tfrac{1}{2} + \frac{1+2k}{4m^2}, \quad \varphi = 2\, arctang \frac{\sqrt{1-\left(\frac{x}{x_1}\right)^2}}{m},$$

$$\varphi_0 = 2\, arctang \frac{1}{m}.$$

Die obigen Resultate wollen wir auf den Fall anwenden, wo a und folglich auch k positiv ist, wo also die eingeschlossene

Flüssigkeit rascher rotirt, wie die äussere, und sich genau so verhält, wie eine einzige, absolut freie flüssige Masse, die mit der Winkelgeschwindigkeit $\sqrt{\theta^2 - \theta'^2}$ rotirt. Es sind alsdann, wofern wir nur Massen mit endlichen Dimensionen im Auge haben, nur solche Werthe von k zu berücksichtigen, die zwischen den Grenzen $\frac{1}{4}$ und ∞ liegen, von welchen die letztere dem Falle der Ruhe und einer sphärischen Gleichgewichtsfläche entspricht, wie sich dieses aus dem Integrale in u ergibt, dessen Radicandus für $k < \frac{1}{4}$ reelle Wurzeln besitzt.

Bezeichnen wir die dem Werthe x_1 entsprechende z-Coordinate, also die Entfernung eines Scheitels von der Aequatorebene oder die halbe Axe durch z_1, so ist:

$$\frac{z_1}{x_1} = \int_0^1 \frac{k - u^2}{\sqrt{u^4 - (1 + 2k)\, u^2 + (2k + k^2)}}\, du,$$

oder auch nach dem Obigen:

$$1. \quad \frac{z_1}{x_1} = m \left\{ E(c, \varphi_0) - \tfrac{1}{2}\left(1 - \frac{k}{m^2}\right) F(c, \varphi_0) \right\} - \Delta(c, \varphi_0),$$

und es sind nur solche Werthe von k zu berücksichtigen, für welche der letzte Ausdruck positiv wird. Dies ergibt sich, wenn wir den Verlauf eines der beiden aus dem Coordinatenanfangspunkt entspringenden Meridianquadranten untersuchen. Bedeutet aber R den absoluten Werth der Wurzel:

$$\sqrt{1 - (ax^3 + bx)^2},$$

so ist:

$$\frac{dz}{dx} = \frac{ax^3 + bx}{R} = \frac{ax\,[x^2 - (1 - k)\, x_1^2]}{R},$$

$$\frac{d^2z}{dx^2} = \frac{3ax^2 + b}{R^3} = \frac{a\,[3x^2 - (1 - k)\, x_1^2]}{R^3}.$$

So lange die Grösse k zwischen $\frac{1}{4}$ und 1 liegt, senkt sich, wie die letzten Ausdrücke lehren, die Meridiancurve von dem im Anfangspunkte liegenden Scheitel unter die Ebene $z = 0$, d. h. nach der Seite der negativen z hin. Anfänglich kehrt sie dieser Ebene ihre Convexität zu, bis zu dem Punkte, dessen Entfernung von der Axe den Werth $x_1 \sqrt{\frac{1}{3}(1 - k)}$ hat; hier kehrt sich nämlich die Krümmung um. Es fährt aber die Curve fort, auch über den Inflexionspunkt hinaus sich von der

Ebene $z=0$ zu entfernen; die grösste Entfernung erreicht sie, wenn x den Werth $x_1\sqrt{1-k}$ hat und die Tangente zur Revolutionsaxe senkrecht steht. Weiter hinaus nähert sich wiederum die Curve der Ebene $z=0$. Das Ende des Quadranten, das auf den Aequator der Fläche zu liegen kommt, bleibt auf der Seite der negativen z, wenn die der Entfernung x_1 entsprechende Coordinate z_1 negativ ist; dies findet, wie wir sehen werden, für solche Werthe von k statt, die zwischen $\frac{1}{4}$ und einem ausgezeichneten Werthe k' liegen, der kleiner als 1 ist und für welchen z_1 verschwindet, so dass bei der durch diesen Werth bestimmten Fläche die Aequatorebene die zwei Hälften der Fläche in ihren Scheiteln berührt. Von den Flächen, für die $k<k'$ ist, kann nach Obigem Abstand genommen werden, da ihr Meridian Doppelpunkte aufweist. Wenn k zwischen k' und 1 liegt, so wird z_1 positiv und es geht folglich die Meridiancurve durch die Ebene $z=0$ hindurch, um sich bis zur Höhe z_1 zu erheben. Die beiden Inflexionspunkte, welche auf einer Hälfte des Meridianes auftreten, so lange k zwischen $\frac{1}{4}$ und 1 liegt, fallen zusammen, wenn jene Grösse die letzte Grenze erreicht. Bei allen Flächen, für welche $k\geq 1$ ist, steigt der Meridian, von dem im Anfangspunkte liegenden Scheitel ausgehend, über die Ebene $z=0$ empor, bis er für $x=x_1$, $z=z_1$ den Aequator der Fläche erreicht.

Aus dem früher aufgeführten Integrale in u ergibt sich für das Verhältniss $\frac{z_1}{x_1}$, dessen Werth über die Verlängerung der Fläche in der Richtung der Revolutionsaxe Aufschluss gibt:

$$d\left(\frac{z_1}{x_1}\right)=k\int_0^1\frac{du}{N^3}\cdot dk,$$

wenn der absolute Werth der in dem ursprünglichen Integrale in u auftretenden Wurzel durch N bezeichnet wird. Aus der letzten Differentialgleichung ersehen wir aber, dass bei den zu betrachtenden Flächen, für die $k>k'$ ist, das Verhältniss $z_1:x_1$ von seinem Maximalwerthe 1, den es für $k=\infty$ aufweist, stetig abnimmt, wenn k stetig abnimmt, um schliesslich

für $k = k'$ zu verschwinden. Hiernach erscheinen die sämmtlichen Flächen in der Richtung der Rotationsaxe abgeplattet, und zwar um so mehr, je kleiner k ist. Gehen wir von der sphärischen Grenzfläche aus, so treten zunächst, wenn k kleiner wird, Flächen auf, welche abgeplatteten Rotationsellipsoiden ähnlich sehen. Die Reihe dieser Flächen wird abgeschlossen mit der Fläche, die dem Werthe $k = 1$ entspricht. Für diese Fläche wird der Krümmungshalbmesser in den beiden Scheiteln unendlich, wie sogleich aus der obigen Formel für $\frac{d^2z}{dx^2}$ folgt. Das Verhältniss der halben Axe zum Aequatorhalbmesser lässt sich für dieselbe in einfacher Weise durch Gammafunctionen berechnen. Da nämlich

$$k = \frac{1}{a x_1^3} = 1$$

ist, so liefert die Gleichung:

$$a x_1^3 + b x_1 = 1$$

jetzt $b = 0$. Die ursprüngliche Integralformel liefert daher für die halbe Axe der Fläche:

$$z_1 = \int_0^{x_1} \frac{a x^3}{\sqrt{1 - a^2 x^6}}\, dx.$$

Setzt man hierin $a = \frac{1}{x_1^3}$ und dann für $\frac{x}{x_1}$ eine neue Variabele y, so kommt:

$$\frac{z_1}{x_1} = \int_0^1 \frac{y^3}{\sqrt{1 - y^6}}\, dy.$$

Mittelst der Substitution $y^6 = z$ findet sich daraus:

$$\frac{z_1}{x_1} = \tfrac{1}{6} \int_0^1 z^{\frac{1}{2} - 1} (1 - z)^{\frac{1}{2} - 1} = \tfrac{1}{6} B\left(\tfrac{2}{3}, \tfrac{1}{2}\right).$$

Drückt man die hier auftretende Betafunction in bekannter Weise durch Gammafunctionen aus, so erhält man:

$$\frac{z_1}{x_1} = \tfrac{1}{6} \cdot \frac{\Gamma(\frac{2}{3})\, \Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(1\frac{1}{6})}.$$

Nach bekannten Relationen der Gammafunctionen kann man zur numerischen Berechnung diesen Ausdruck auch in folgenden umgestalten:

$$\frac{z_1}{x_1} = \frac{\pi\sqrt{\pi}}{9\sqrt{3}\,\Gamma(1\frac{1}{6})\,\Gamma(1\frac{1}{3})}.$$

Hieraus endlich findet sich: $\frac{z_1}{x_1} = 0{,}4312.$

Nimmt k weiterhin an Grösse ab, so treten für $1 > k > k'$ Flächen auf, welche in der Gegend der Scheitel eingedrückt sind und zwei Inflexions-Parallelkreise aufweisen. Die Grenzform für diese Reihe ist die dem Werthe $k = k'$ entsprechende schüsselförmige Fläche, deren beide Hälften sich in den zusammenfallenden Scheiteln berühren. Was das Volumen der Flächen betrifft, die uns hier beschäftigen, so hat man:

$$V = 2\pi \int_0^{x_1} x^2\, dz,$$

oder, wenn $ax^3 + bx = i$ gesetzt wird, und da

$$x^2 = \frac{1}{3a}\left(\frac{di}{dx} - b\right),$$

$$dz = \frac{i}{\sqrt{1-i^2}}\, dx$$

ist:

$$\frac{V}{\frac{2}{3}\pi} = \frac{1}{a}\left\{\int_0^{x_1} \frac{i\, di}{\sqrt{1-i^2}} - b\int_0^{x_1} \frac{i\, dx}{\sqrt{1-i^2}}\right\},$$

oder:

$$\frac{V}{\frac{2}{3}\pi} = W = \frac{1 - bz_1}{a},$$

oder, da $b = \frac{k-1}{x_1 k}$ ist:

$$2. \qquad aW = 1 - \frac{k-1}{k} \cdot \frac{z_1}{x_1}.$$

Hieraus folgt weiter noch:

$$\frac{W}{x_1^3} = \frac{1 - bz_1}{ax_1^3} = k - (k-1)\frac{z_1}{x_1},$$

3. $$\frac{x_1}{W^{\frac{1}{3}}} = \frac{1}{\sqrt[3]{k-(k-1)\frac{z_1}{x_1}}}.$$

Aus den vorstehenden Formeln ersieht man die Richtigkeit des folgenden Satzes: Wenn das Verhältniss $\frac{z_1}{x_1}$ für zwei rotirende flüssige Massen dasselbe ist, die Gleichgewichtsfiguren derselben also einander ähnlich sind, so verhalten sich die Volumina derselben umgekehrt wie die Werthe der Constanten a. Sind die Flüssigkeiten beide Mal von derselben Natur, so kann die Aenderung der Constante a nur durch eine Veränderung der Rotationsgeschwindigkeit bewirkt werden; sind also z. B. beide flüssige Massen vollkommen frei und beträgt das Volumen der einen nur ein Viertel des Volumens der anderen, so muss die kleinere zweimal rascher rotiren, damit die Gestalten beider einander ähnlich werden, was durch die Plateau'schen Versuche bestätigt worden ist. Hat man für eine flüssige Masse vom Volumen $\frac{2}{3}\pi$ und für ein bestimmtes k nach Gleichung 1) das Verhältniss $\frac{z_1}{x_1}$, nach Gleichung 2) (für $W=1$) die Constante a und endlich $x_1 = \sqrt[3]{\frac{1}{ak}}$ berechnet, so erhält man für eine flüssige Masse vom Volumen $\frac{2}{3}\pi\lambda$ die Grössen x_1 und z_1, indem man die vorhin gefundenen Werthe mit $\sqrt[3]{\lambda}$ multiplicirt und ebenso die Constante a, indem man den vorigen Werth mit $\frac{1}{\lambda}$, oder im Falle vollkommen freier Flüssigkeiten von gleicher Natur die Rotationsgeschwindigkeit, indem man die für die erstere Flüssigkeit geltende mit $\sqrt{\frac{1}{\lambda}}$ multiplicirt. Man bemerke noch, dass, wenn das Flüssigkeitsvolumen $\frac{2}{3}\pi$ ist, die schüsselförmige Fläche (bei welcher $z_1 = 0$ ist) für den Werth Eins der Constante a auftritt.

Wir lassen nun eine Tabelle folgen, in welcher die Werthe der Grössen $\frac{z_1}{x_1}$, aW und $x_1 : W^{\frac{1}{3}}$ aufgeführt sind, wie sie sich aus den angenommenen Werthen von k mittelst der For-

meln 1, 2 und 3 berechnen. Die Genauigkeit der Zahlen geht im Allgemeinen nur bis zu der zweiten Decimalstelle inclusive.

k	$z_1 : x_1$	aW	$x_1 : W^{\frac{1}{3}}$	k	$z_1 : x_1$	aW	$x_1 : W^{\frac{1}{3}}$
0,4295	0,000	1,000	1,325	0,9	0,390	1,043	1,021
0,45	0,033	1,040	1,287	1	0,431	1,000	1,000
0,5	0,102	1,102	1,219	2	0,649	0,675	0,904
0,6	0,205	1,137	1,136	5	0,831	0,334	0,824
0,7	0,282	1,121	1,084	10	0,908	0,182	0,818
0,8	0,341	1,085	1,048	∞	1,000	0,000	0,793

Wie die obige Tabelle ersehen lässt, wächst der Werth von aW anfänglich von der Einheit ausgehend, wenn k, von der mit k' bezeichneten Grenze, die der Zahl 0,4295 nahe liegt, ausgehend, wächst. Es erreicht die Grösse aW für einen gewissen Werth von k, der mit $\frac{2}{5}$ nahe zusammenfällt, ein Maximum, um hierauf wieder bis zum Werthe 1 abzunehmen, den sie für $k = 1$ erreicht. Indem k weiterhin wächst, nähert sich die gedachte Grösse der Grenze 0. Es folgt aber hieraus, dass für gegebene Werthe der Constanten ϱ und τ nur so lange Gleichgewichtsflächen mit Scheiteln auftreten, als die Grösse $\theta^2 - \theta'^2$ einen gewissen Grenzwerth nicht übersteigt. Dieser Grenzwerth ergibt sich nahezu aus der Gleichung:

$$(\theta^2 - \theta'^2)\, V = \tfrac{16}{5}\pi \,.\, 1{,}137 \,.\, \frac{\tau}{\varrho}.$$

So lange die Grösse $\theta^2 - \theta'^2$ so klein ist, dass aW zwischen 0 und 1 zu liegen kommt, tritt nur eine einzige ellipsoidartige Gleichgewichtsfläche auf, deren Abplattung um so grösser ist, je grösser der Ueberschuss der Rotationsgeschwindigkeit der eingeschlossenen Flüssigkeit über die der äusseren Flüssigkeit ist. Wenn aber dieser Ueberschuss eine solche Grösse hat, dass aW zwischen 1 und den Grenzwerth 1,137 zu liegen kommt, so sind zwei Gleichgewichtsflächen möglich, welche beide zu den Flächen mit Inflexionslinien gehören. Für eine isolirte flüssige Masse, auf die wir uns von hier ab beschränken wollen, ergibt sich aus Obigem, dass sie, wenn ihre Rotationsgeschwindigkeit von Null ausgehend stufenweise grösser wird, von der Sphäre ausgehend der Reihe nach die ellip-

soidenartigen Oberflächen zeigt. Wenn aber das Quadrat der Rotationsgeschwindigkeit den Werth $\frac{16{,}8\,\tau}{\varrho\,V}$ übersteigt, jedoch kleiner als $\frac{18{,}6\,\tau}{\varrho\,V}$ bleibt, so ist ihre Oberfläche die eine oder die andere von zwei bestimmten Flächen aus der Reihe der eingedrückten Flächen. Welche von diesen zwei Flächen auftrete, wird durch das Rotationsmoment der rotirenden Flüssigkeit bestimmt. In Bezug auf diese Grösse sind nämlich die beiden gedachten Flächen verschieden, indem das Rotationsmoment stetig zunimmt, wenn k von ∞ ausgehend stetig abnimmt. Nimmt dann die Rotationsgeschwindigkeit noch mehr zu, so treten als Gleichgewichtsflächen ringförmige Flächen auf, die nur noch durch hyperelliptische Functionen darstellbar sind.

Um uns von obiger Behauptung hinsichtlich des Rotationsmomentes zu überzeugen, stellen wir die folgenden Betrachtungen an. Bezeichnen wir das Rotationsmoment der mit der Winkelgeschwindigkeit θ rotirenden Flüssigkeit durch M, so hat man, wofern letztere von einer der Gleichgewichtsflächen begrenzt ist, die in der Axe zwei Scheitel besitzen und oben näher erörtert wurden:

$$M = 4\pi\,\varrho\,\theta \int_0^{x_1} (z_1 - z)\, x^3\, dx,$$

woraus sich durch theilweise Integration ergibt:

$$\frac{M}{\pi\,\varrho\,\theta} = M' = \int_0^{z_1} x^4\, dz.$$

Ferner findet man, indem man wie früher die Substitution:

$$x_1^2 - x^2 = x_1^2 u^2$$

in Anwendung bringt, und zugleich für dz seinen Ausdruck in u substituirt:

$$\frac{M'}{x_1^5} = \int_0^1 \frac{k - (1+2k)\,u^2 + (2+k)\,u^4 - u^6}{\sqrt{u^4 - (1+2k)\,u^2 + (2k+k^2)}}\, du.$$

Letztere Gleichung geht aber durch die Substitution:

$$u = m\, tang\, \tfrac{1}{2}\varphi,$$

wo m die früher angegebene Bedeutung hat, in die folgende über:

$$\frac{2M'}{x_1^5} = \frac{k}{m}\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{\Delta(c,\varphi)} - m(1+2k)\int_0^{\varphi_0} \frac{tang^2\tfrac{1}{2}\varphi}{\Delta(c,\varphi)}\, d\varphi$$

$$+ m^3(2+k)\int_0^{\varphi_0} \frac{tang^4\tfrac{1}{2}\varphi}{\Delta(c,\varphi)}\, d\varphi - m^5\int_0^{\varphi_0} \frac{tang^6\tfrac{1}{2}\varphi}{\Delta(c,\varphi)}\, d\varphi,$$

wo c und φ_0 die frühere Bedeutung behalten. Um den letzten Ausdruck so umzugestalten, dass er sich mit Hülfe der elliptischen Integrale berechnen lasse, setzen wir:

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{tang^n\tfrac{1}{2}\varphi}{\Delta(c,\varphi)}\, d\varphi = T_n,$$

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{d\varphi}{sin^n\varphi\, \Delta(c,\varphi)} = Z_{-n},$$

$$\int_0^{\varphi_0} \frac{cos\,\varphi\, d\varphi}{sin\,\varphi^n\, \Delta(c,\varphi)} = S_{-n};$$

dann wenden wir die Formel:

$$tang^2\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{1-cos\,\varphi}{1+cos\,\varphi} = \frac{2}{sin^2\varphi} - \frac{2\,cos\,\varphi}{sin^2\varphi} - 1$$

an und erhalten:

$T_0 = Z_0,$

$T_2 = 2Z_{-2} - Z_0 - 2S_{-2},$

$T_4 = 8Z_{-4} - 8Z_{-2} + Z_0 - 8S_{-4} + 4S_{-2},$

$T_6 = 32Z_{-6} - 48Z_{-4} + 18Z_{-2} - Z_0 - 32S_{-6} + 32S_{-4} - 6S_{-2}.$

Zur Berechnung der Grössen Z hat man folgende Reductionsformel:

$$(2n-3)\, Z_{2n-4} - (1+c^2)\,(2n-2)\, Z_{2n-2} + (2n-1)\, c^2 Z_{2n}$$
$$= cos\,\varphi_0\, sin\,\varphi_0^{2n-3}\, \Delta(c,\varphi_0),$$

welche sich leicht durch Differentiation des Ausdruckes

$$\cos\varphi \sin\varphi^{2n-3} \Delta(c,\varphi)$$

ergibt; dieselbe liefert der Reihe nach:

$$Z_0 = F(c,\varphi_0),$$

$$Z_{-2} = F(c,\varphi_0) - E(c,\varphi_0) - \frac{\cos\varphi_0 \Delta(c,\varphi_0)}{\sin\varphi_0},$$

$$Z_{-4} = \tfrac{2}{3}(1+c^2) Z_{-2} - \tfrac{1}{3} c^2 Z_0 - \tfrac{1}{3} \cdot \frac{\cos\varphi_0 \Delta(c,\varphi_0)}{\sin\varphi_0^3},$$

$$Z_{-6} = \tfrac{4}{5}(1+c^2) Z_{-4} - \tfrac{3}{5} c^2 Z_{-2} - \tfrac{1}{5} \cdot \frac{\cos\varphi_0 \Delta(c,\varphi_0)}{\sin\varphi_0^5}.$$

Ferner hat man zur Berechnung der Grössen S folgende Reductionsformel:

$$(n-1) S_{-n} - (n-2) c^2 S_{-n+2} = -\sin\varphi_0^{-n+1} \Delta(c,\varphi_0),$$

wie sich sofort durch Differentiation des Ausdruckes

$$\sin\varphi^{-n+1} \Delta(c,\varphi)$$

ergibt; dieselbe gibt folgende Beziehungen:

$$S_{-2} = -\frac{\Delta(c,\varphi_0)}{\sin\varphi_0},$$

$$S_{-4} = -\frac{\Delta(c,\varphi_0)}{3\sin\varphi_0^3} + \frac{2c^2}{3} S_{-2},$$

$$S_{-6} = -\frac{\Delta(c,\varphi_0)}{5\sin\varphi_0^5} + \frac{4c^2}{5} S_{-4}.$$

Wenn man nun die beiden letzten Gruppen von Formeln bei den Ausdrücken T in Anwendung bringt, so kommt:

$$T = F(c,\varphi_0),$$

$$T_2 = F(c,\varphi_0) - 2E(c,\varphi_0) + 2 \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi_0 \Delta(c,\varphi_0),$$

$$T_4 = \tfrac{1}{3}\left\{4(2c^2-1) T_2 - F(c,\varphi_0) + 2\frac{\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi_0 \Delta(c,\varphi_0)}{\cos\frac{1}{2}\varphi_0^2}\right\},$$

$$T_6 = \tfrac{1}{15}\left\{[23 - 128c^2(1-c^2)] T_2 - 8(2c^2-1)\right.$$
$$\left.\left[F(c,\varphi_0) - \frac{2\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi_0 \Delta(c,\varphi_0)}{\cos\frac{1}{2}\varphi_0^2}\right] + 6\frac{\operatorname{tang}^3\frac{1}{2}\varphi_0 \Delta(c,\varphi_0)}{\cos\frac{1}{2}\varphi_0^2}\right\}.$$

Die Substitution der letzteren Ausdrücke in die für die Grösse M' abgeleitete Formel liefert nun endlich:

$$10M' = x_1^5 \left\{ 2(1-k)^2 m E(c,\varphi_0) + \frac{k(1+k^2)-m^2(1-k)^2}{m} F(c,\varphi_0) \right.$$
$$\left. + 2(1-k)(m^2+k)\,\Delta(c,\varphi_0) \right\}.$$

Was das Rotationsmoment selbst betrifft, so kommt, da

$$\varrho\theta^2 = 8a\tau$$

und

$$ak x_1^3 = 1$$

ist:

$$M = \pi \sqrt{\frac{2\varrho\tau}{25}}\, P,$$

wo zu setzen ist:

$$P = \frac{x_1^{\frac{7}{2}}}{k^{\frac{1}{2}}} \left\{ 2(1-k)^2 m E(c,\varphi_0) + \frac{k(1+k^2)-m^2(1-k)^2}{m} F(c,\varphi_0) \right.$$
$$\left. + 2(1-k)(m^2+k)\,\Delta(c,\varphi_0) \right\}.$$

Hierbei mag noch bemerkt werden, dass für $k=1$ sich auch das Rotationsmoment der entsprechenden Fläche durch Gammafunctionen darstellen lässt; nach dem Früheren hat man nämlich für diesen Fall:

$$M' = \int_0^{x_1} \frac{ax^7}{\sqrt{1-a^2x^6}}\, dx,$$

$$= x_1^5 \int_0^1 \frac{y^7}{\sqrt{1-y^6}}\, dy.$$

Verwandelt man durch die Substitution $y^6 = z$ vorstehendes Integral in eine Betafunction und drückt diese dann durch Gammafunctionen aus, so kommt:

$$M' = \frac{3x_1^5}{5\sqrt{\pi}} \Gamma(1\tfrac{1}{6})\,\Gamma(1\tfrac{1}{3}).$$

Mittelst der obigen Formeln sind die Werthe der Grösse $P : W^{\frac{7}{2}}$ berechnet, die in der folgenden Tabelle neben die auch in der ersten Tabelle zu Grunde gelegte Reihe von Werthen der Grösse k gestellt sind.

k	$P : W^{\frac{1}{3}}$	k	$P : W^{\frac{1}{3}}$	k	$P : W^{\frac{1}{3}}$
0,4295	6,348	0,7	3,660	2	1,820
0,45	5,887	0,8	3,293	5	1,097
0,5	5,109	0,9	3,019	10	0,753
0,6	4,198	1,0	2,804	∞	0,000

In der That bedingt, wie wir aus der letzten Tabelle schliessen und wie oben behauptet wurde, ein stetiges Wachsthum des Rotationsmomentes eine stetige Abnahme der Grösse k, wenigstens innerhalb der hier ins Auge gefassten Grenzen. Die entsprechende Folge von Gestalten ist aber nach dem Obigen wesentlich dieselbe, wie sie in den bekannten Versuchen Plateau's über die Rotation einer der Schwerkraft entzogenen Flüssigkeit uns entgegentritt, wenn die Drehungsgeschwindigkeit wächst und alle Verhältnisse möglichst regelmässig sind. Denn dadurch, dass man die Umdrehungsgeschwindigkeit der Axe, deren Rotation sich dem Oeltropfen in Folge der Adhäsion mittheilt, continuirlich steigen lässt, brauchen nicht gerade die in der Oberfläche gelegenen Molecüle des Tropfens dieselbe fortwährend wachsende Rotationsgeschwindigkeit wie die Axe zu haben, wohl aber wird das Rotationsmoment des Tropfens continuirlich zunehmen und die Folge der Gestalten also die sein, welche bei den Plateau-schen Versuchen wirklich auftritt: Kugel, abgeplattete ellipsoidartige Flächen, an den Polen ausgehöhlte Flächen, die tellerförmige Fläche, ringförmige Flächen.

Dass die Umdrehungsgeschwindigkeit in der Oberfläche der flüssigen Masse bedeutend kleiner ist wie die der festen Axe, geht auch aus der Anzahl der Umdrehungen hervor, die letztere in den Versuchen Plateau's machen musste, damit der Oeltropfen die Gestalt der tellerförmigen Fläche annahm. Bei einer Olivenölkugel (specifisches Gewicht 0,919) von 3^{cm} Radius, welche in einer Mischung von Wasser und Weingeist von demselben specifischen Gewichte 0,919 schwebte, trat dies nämlich ein, wenn die feste Axe in der Secunde 2—3 Umdrehungen machte. Gemäss den beobachteten Capillarerhebungen können wir aber für die Capillaritätsconstanten α und α'

beider Flüssigkeiten resp. 0,0335 und 0,0295, demnach also, wenn wir von der Einwirkung beider Flüssigkeiten auf einander absehen und mithin $\tau = o + o'$ setzen, für τ annähernd den Werth 0,063 nehmen. Hiernach ergeben unsere Formeln für die höchste zulässige Umdrehungszahl in der Secunde, wenn die Gleichgewichtsfläche nicht ringförmig sein soll, etwa 0,5. Die wirklich beobachtete Umdrehungszahl der festen Axe ist also 4 bis 6 mal grösser, als die von der Theorie für die Oberfläche geforderte. Diese Verlangsamung der Umdrehung der Oberfläche hat wohl zum grossen Theile ihren Grund in der Reibung der beiden Flüssigkeiten gegen einander; dann aber beachte man auch, dass durch die Rotation der Oelmasse die angrenzenden Theilchen der umschliessenden Flüssigkeit jedenfalls auch in eine, wenn auch viel langsamere, Rotation versetzt werden. Da aber die Gestalt des Oeltropfens von der Differenz $\theta^2 - \theta'^2$ abhängt, so hat der erwähnte Umstand dieselbe Wirkung, als wenn die Geschwindigkeit des Tropfens kleiner wäre, als sie wirklich ist.

Es liegt nahe, die hier gewonnenen Resultate über die Gestalt der Oberfläche einer unter dem Einflusse der Molecularkräfte rotirenden Flüssigkeit mit den Gesetzen zu vergleichen, welche die Gestalt der Oberfläche in Folge der gegenseitigen Anziehung der Flüssigkeitstheilchen bedingen. Im letzten Falle genügt bekanntlich das abgeplattete Rotationsellipsoid der hydrostatischen Gleichgewichtsbedingung, so lange die Winkelgeschwindigkeit eine gewisse Grenze nicht überschreitet, aber so, dass sich einer jeden unter dieser Grenze liegenden Winkelgeschwindigkeit zwei mögliche Gleichgewichtsflächen mit ungleicher Abplattung zuordnen, die auch hier durch ihr Rotationsmoment verschieden sind. Die Gestalt der auftretenden Gleichgewichtsfläche hängt hier aber nur von der Winkelgeschwindigkeit und der Dichtigkeit der Flüssigkeit ab, nicht vom Volumen und der sonstigen Natur derselben, wie es in dem von uns behandelten Falle der Molecularkräfte der Fall ist.

Fragen wir uns endlich noch, wie sich die Verhältnisse in dem Falle gestalten, wo eine rotirende, vollkommen freie Flüssigkeit sowohl unter dem Einflusse der allgemeinen Massen-

anziehung, als der Molecularkräfte steht. Unter Beibehaltung der früheren Bezeichnungen können wir die Gleichung, der die Oberfläche jetzt genügen muss, folgendermassen schreiben:

$$\tfrac{1}{2}\varrho\theta^2 x^2 + \varrho f V - o\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = Const.,$$

wo f die Attractionsconstante und V das Potential der rotirenden Masse bedeutet. Wenn nun die Rotationsgeschwindigkeit klein ist und demnach die Oberfläche nicht stark von der Kugelgestalt abweicht, so kann man, unter R den mittleren Halbmesser derselben verstanden, annähernd setzen:

$$V = \tfrac{4}{3}\pi R^2, \qquad \frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2} = \frac{2}{R}.$$

Ebenso können wir in erster Annäherung setzen, unter E den mittleren Halbmesser und unter σ die mittlere Dichtigkeit der Erde verstanden:

$$f = \frac{3g}{4\pi\sigma E}.$$

Daraus aber erhellt, dass in der obigen allgemeinen Gleichung für die Oberfläche das von der Attraction herrührende Glied:

$$\varrho f V = \frac{\varrho g R^2}{\sigma E}$$

desto mehr zurücktritt, je kleiner R wird; je grösser dagegen R wird, desto mehr verschwindet das auf die Molecularkräfte sich beziehende Glied:

$$o\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right) = \frac{2o}{R}.$$

Nur bei mittelgrossen rotirenden Massen sind daher sowohl die Molecularkräfte, als auch die allgemeine Massenanziehung der Flüssigkeitstheilchen auf die Gestalt der Oberfläche von Einfluss; bei sehr grossen Massen verschwindet der Einfluss der Molecularkräfte und die Gestalt der Oberfläche ist nur durch die Gravitation bedingt; bei sehr kleinen Massen dagegen verschwindet umgekehrt der Einfluss der Attraction und die Gestalt der Oberfläche hängt nur von den Molecularkräften ab.

Bemerkungen zu den Figurentafeln.

Tab. I Fig. 1 stellt die Meridiancurve eines Unduloides für das Verhältniss $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0{,}175$ dar (s. S. 164 u. f.).

„ „ Fig. 2 zeigt die Meridiancurve eines Nodoides für dasselbe Verhältniss $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = 0{,}175$.

Tab. II Fig. 3 zeigt die Meridiancurve eines Unduloides für das Verhältniss $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{2}$.

„ „ Fig. 4 stellt in grösserem Massstabe die eine Hälfte der Meridiancurve eines Nodoides für dasselbe Verhältniss $\frac{\alpha_1}{\alpha_2} = \frac{1}{2}$ dar.

Tab. III dient zur Erläuterung der Tropfenbildung bei einem im labilen Gleichgewichte befindlichen schwerlosen Flüssigkeitscylinder (s. S. 171 u. f.).

„ „ Fig. 5 zeigt den ursprünglichen Flüssigkeitscylinder.

„ „ Fig. 6 zeigt die Gestalt der Flüssigkeit, wenn die Bildung der Ausbuchtungen soweit fortgeschritten ist, dass die Länge der Verbindungscylinder ihrem Umfange gleich geworden ist, deren Stabilität also aufhört.

„ „ Fig. 7 zeigt die grösseren und kleineren Tropfen, welche entstehen, wenn die flüssige Masse in dem in Fig. 2 dargestellten Stadium der Gestaltveränderungen zerreisst.

Tab IV zeigt die Meridiancurven der bei einer rotirenden schwerlosen Flüssigkeit auftretenden Gleichgewichtsflächen (s. S. 177 u. f.).

„ „ Fig. 8 stellt die kugelförmige Gestalt der Flüssigkeit in ruhendem Zustande dar.

Tab. IV Fig. 9 zeigt die Grenzfläche, bei welcher die abgeplatteten Gleichgewichtsflächen in die ausgehöhlten übergehen (für $k = 1$).

„ „ Fig. 10 zeigt die mittlere der um die Axe ausgehöhlten Flächen (für $k = 0{,}6$).

„ „ Fig. 11 zeigt endlich die schüsselförmige Grenzfläche, welche den Uebergang bildet von den die Rotationsaxe durchschneidenden Flächen zu den ringförmigen Gestalten (für $k = 0{,}4295$).

Berichtigungen.

S. 30 Z. 3 v. o. muss $-4\pi\tau$ stehen statt τ.

S. 30 Z. 17 v. o. muss es heissen: $N = \lambda\theta + 2\mu \frac{d^2 V}{dn^2}$.

Druck von B. G. Teubner in Dresden.

Fig. 1.

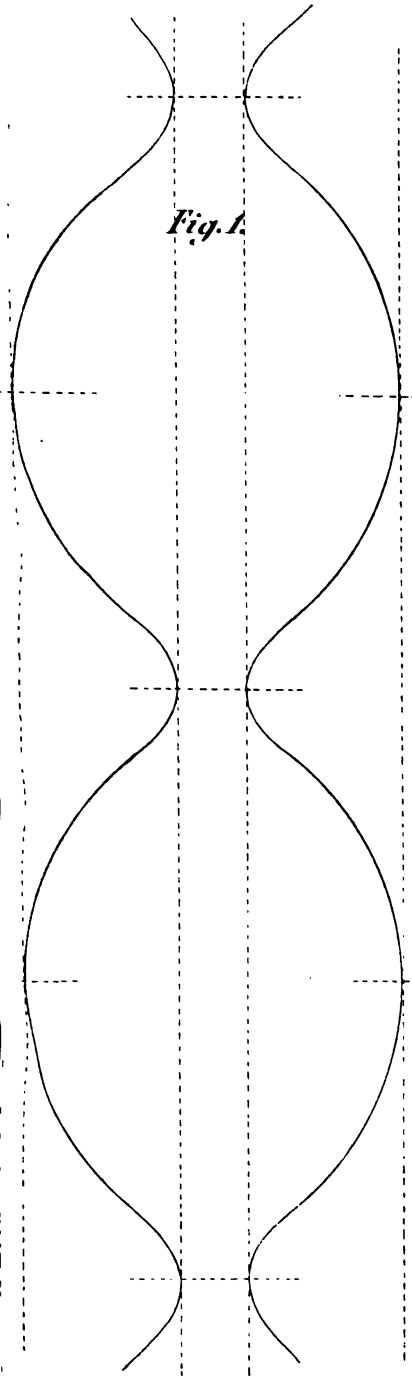


Fig. 2.

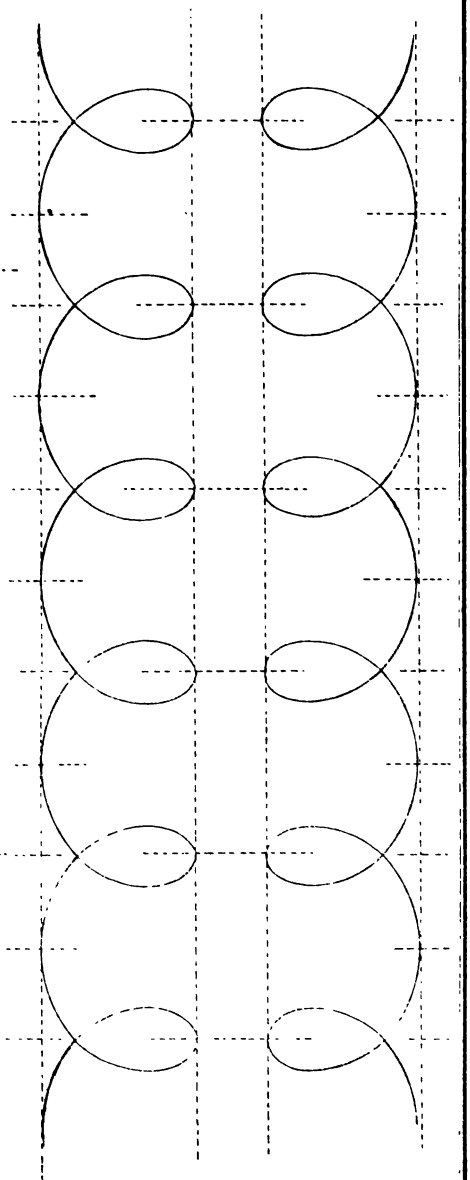


Fig. 3.

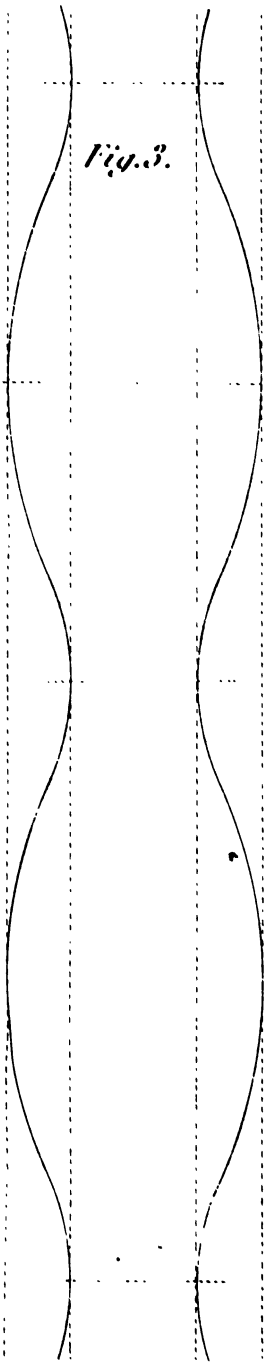
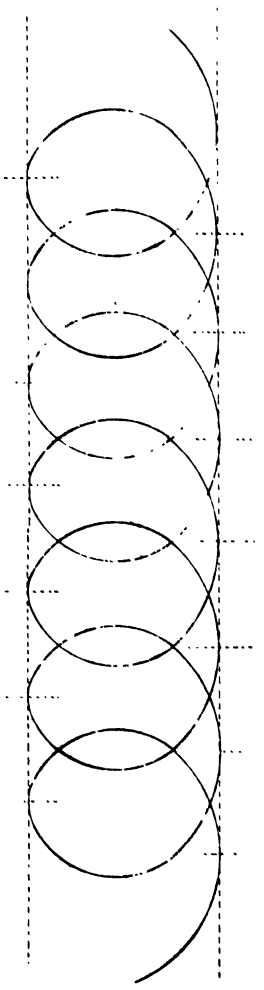


Fig. 4.



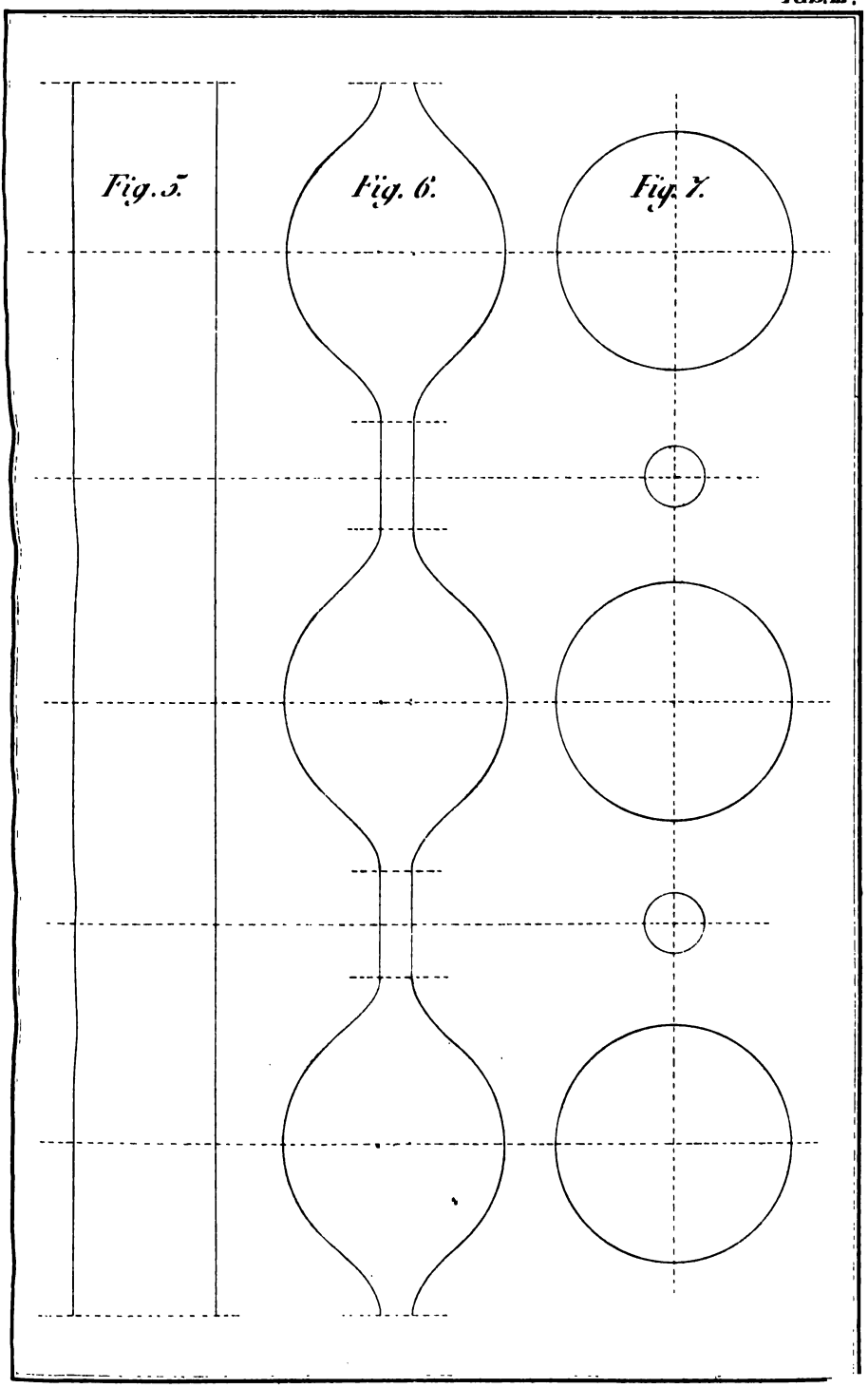


Fig. 5.
Fig. 6.
Fig. 7.

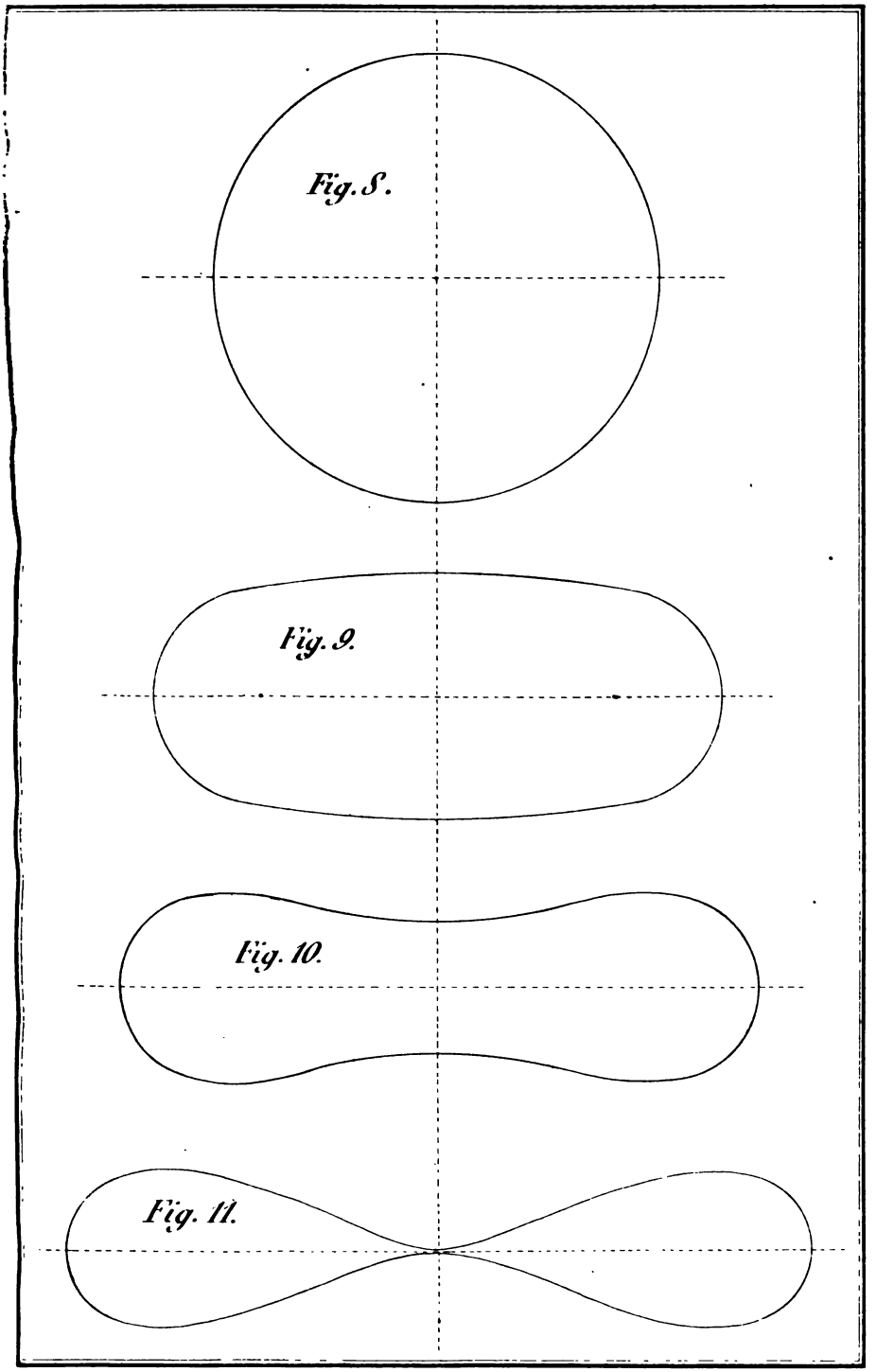
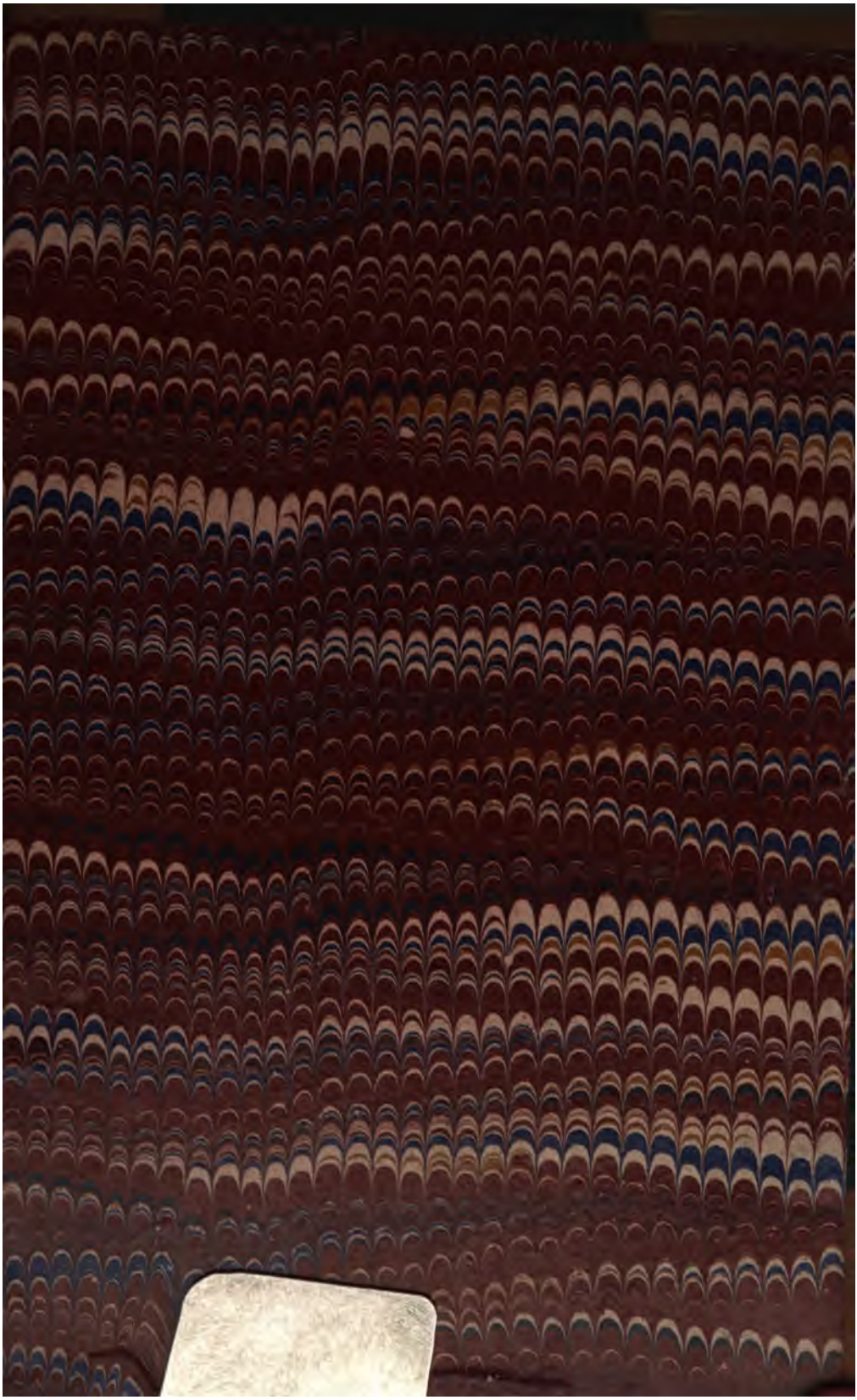


Fig. 8.
Fig. 9.
Fig. 10.
Fig. 11.